Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica - CdL in Ing. Informatica delle Comunicazioni ed Elettronica
ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
a.a. 2019-2020 - Trento, 9 gennaio 2020

FILA (A)

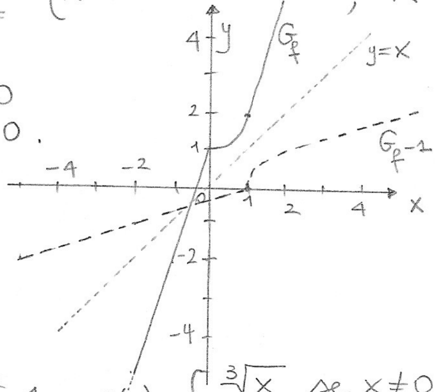
a1) $-x-\frac{1}{2x}>0 \iff x+\frac{1}{2x}<0 \iff \frac{x^2+1}{2x}<0$. Si ha quindi
$A=\{x\in\mathbb{R}: -x-\frac{1}{2x}>0\} =]-\infty,0[$. Quindi vale ii), ossia A è limitato solo superiormente.

a2) $A=\{x_n=(-1)^n\frac{1}{n^2};\ n\in\mathbb{N}, n\geq 1\} = \{-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \dots\} =$
$= \{-1, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{25}, \dots, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}\}$. Ne segue che $\min A=-1$, $\max A=\frac{1}{4}$.

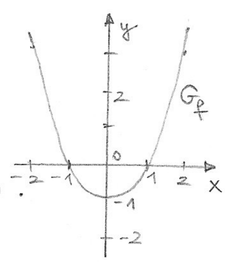
a3) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow z^4 = \cos(\cancel{4}\cdot\frac{\pi}{\cancel{4}})+i\sin(\cancel{4}\cdot\frac{\pi}{\cancel{4}}) = -1$.

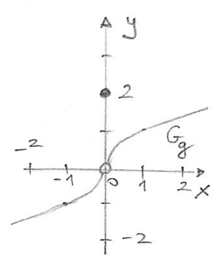
a4) $f(x)=\frac{1}{\log(x-1)}$: $\operatorname{dom} f=\{x\in\mathbb{R}: x-1>0,\ x-1\neq 1\} =]1,+\infty[\setminus\{2\}$.

a5) $f(x)=\begin{cases}3x+1 & \text{se } x<0\\ x^2+1 & \text{se } x\geq 0.\end{cases}$



a6) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$ $g(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & \text{se } x\neq 0\\ 2 & \text{se } x=0\end{cases}$





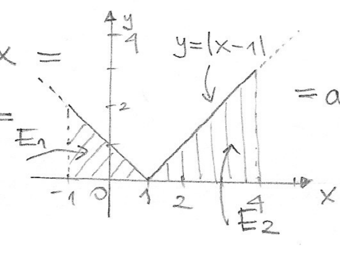
$(g\circ f)(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{f(x)} & \text{se } f(x)\neq 0\\ 2 & \text{se } f(x)=0\end{cases}$
$=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2-1} & \text{se } x\neq\pm 1\\ 2 & \text{se } x=\pm 1.\end{cases}$

a7) $f(x)=e^{2x}-\sin x \underset{\uparrow}{=} 1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3)-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ per $x\to 0$
$e^t=1+t+t^2/2+t^3/3!+o(t^3)$ per $t\to 0$
$=1+x+2x^2+\frac{3}{2}x^3+o(x^3)$ per $x\to 0$. Quindi
$P_3(x)=1+x+2x^2+\frac{3}{2}x^3$ polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0=0$, di f.

a8) $F(x)=\int_0^x e^{2t^2}dt \underset{TFC}{\Longrightarrow} F'(x)=e^{2x^2}>0 \Rightarrow$ F è strett. crescente su $\mathbb{R}$.

a9) $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(1-x^2)n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(e^{1-x^2})^n$ serie geom. Essa è convergente $\iff |e^{1-x^2}|<1$
$\iff e^{1-x^2}<1 \iff e^{1-x^2}<e^0 \underset{e^x\nearrow}{\iff} 1-x^2<0 \iff x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

a10) $\int_{-1}^{4}|x-1|\,dx =$ = area E_1 + area E_2 $= \frac{\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{2}}+\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{13}{2}$.



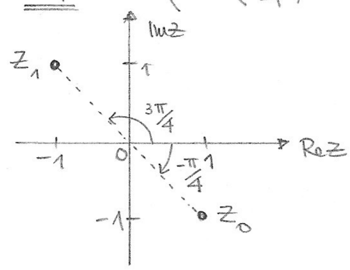
b1) i) Oss. che l'eq. $z^2 = -2i$ si scrive equivalentemente come

$z^2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Le soluzioni (ossia le radici quadrate di $-2i$) sono

$$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)\right) \quad \text{con } k=0,1, \text{ ossia}$$

$$\underline{\underline{z_0}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{1-i}} \quad \text{e}$$

$$\underline{\underline{z_1}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{-1+i}}. \qquad \square$$



ii) Oss. che la prima eq. del sistema $(z^2+2i)(z-1)=0$ ha come soluzioni le radici quadrate di $-2i$ (vedi i)) e $z=1$, ossia

$$\underline{\underline{z = 1-i}}, \qquad \underline{\underline{z = -1+i}}, \qquad \underline{\underline{z = 1}}.$$

Dalla seconda equazione $w\bar{z} - i = 0$ ricaviamo $w = \frac{i}{\bar{z}}$, e quindi:

per $z = 1-i$ si ha $w = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$;

per $z = -1+i$ si ha $w = \frac{i}{-1-i} = \frac{i(-1+i)}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$;

per $z = 1$ si ha $w = i$. In definitiva, le coppie $(z,w) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ soluzioni del sistema dato sono $\underline{\underline{(z,w) = \left(1-i, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}}$,

$\underline{\underline{(z,w) = \left(-1+i, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)}}$ e $\underline{\underline{(z,w) = (1, i)}}$. $\square$

iii) Notiamo che $\left|(1-i)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right| = \left|\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}i} - \cancel{\frac{1}{2}i} + \frac{1}{2}\right| = 1$;

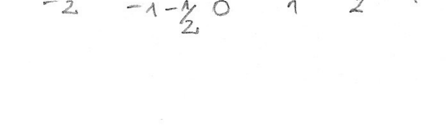
$\left|(-1+i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right| = \left|\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}i} - \cancel{\frac{1}{2}i} + \frac{1}{2}\right| = 1$, e $|1\cdot i| = 1$.

Questo fatto si deduce facilmente dalla seconda eq. del sistema. Infatti, se (z,w) è soluzione del sistema di eq. dato, da $z\bar{w} - i = 0 \Rightarrow |z\bar{w}| = |i| = 1$. Ma $|zw| = |z||w| = |z||\bar{w}| = |z\bar{w}|$, e quindi $|zw| = 1$. ■

b2) $\boxed{f(x) = x - |x| + \frac{1}{2(x+1)}}$ • $\underline{\text{dom} f} = \mathbb{R}\setminus\{-1\} = \underline{]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,+\infty[}$.

Possiamo scrivere $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2(x+1)} = \frac{4x^2+4x+1}{2(x+1)} & \text{se } x<0,\ x\neq -1 \\ \frac{1}{2(x+1)} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Oss. che $4x^2+4x+1 = (2x+1)^2$ • $\underline{\text{segno di } f}$



• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \underline{-\infty}$; poiché $f(x) = 2x + \frac{1}{2(x+1)}$ se $x<0$, $x\neq -1$ si deduce immediatamente che $\underline{y=2x \text{ è asintoto obliquo per } f, \text{ per } x\to-\infty}$;

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \underline{-\infty}$; $\underline{x=-1 \text{ è asintoto verticale (da sinistra) per } f}$;

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \underline{+\infty}$; $\underline{x=-1 \text{ è asintoto verticale (da destra) per } f}$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \underline{0}$; $\underline{y=0 \text{ è asintoto orizzontale per } f, \text{ per } x\to+\infty}$.

• f è continua nel suo dominio, essendo somma e rapporto di funz. continue.

• f è sicuramente derivabile $\forall x \in \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$ e $\forall x\in \operatorname{dom} f\setminus\{0\}$ si ha

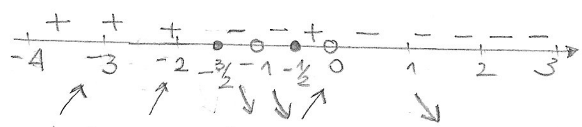
$$f'(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{2(x+1)^2} = \dfrac{4(x^2+2x+1)-1}{2(x+1)^2} = \dfrac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2} & \text{se } x<0,\ x\neq -1 \\ -\dfrac{1}{2(x+1)^2} & \text{se } x>0. \end{cases}$$

Per studiare la derivabilità in $x=0$ calcoliamo il limite per $x\to 0$ della funzione $f'(x)$. Essendo f continua in $x=0$, per un corollario del teorema di de L'Hôpital, si ha $f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = \frac{3}{2}$ e $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$.
Risulta quindi che $\underline{(0,f(0)) = (0,\tfrac12) \text{ è un pt. angoloso per } f}$.

• Osserviamo infine che $f'(x) = 0 \iff \begin{cases} 4x^2+8x+3=0 \\ x<0,\ x\neq-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{1/2} = \dfrac{-8\pm\sqrt{64-48}}{8} \\ x<0,\ x\neq -1. \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x_{1/2} = \dfrac{-8\pm 4}{8} \\ x<0,\ x\neq-1 \end{cases} \begin{matrix} -\frac12 \\ -\frac32 \end{matrix} \quad \text{pt. critici per } f$$

$f(-\frac12) = 0$, $f(-\frac32) = -4$



$\Rightarrow$ $\underline{x = -\frac32 \text{ è un pt. di max. loc. stretto per } f}$;

$\underline{x = -\frac12 \text{ è un pt. di min. loc. stretto per } f}$.

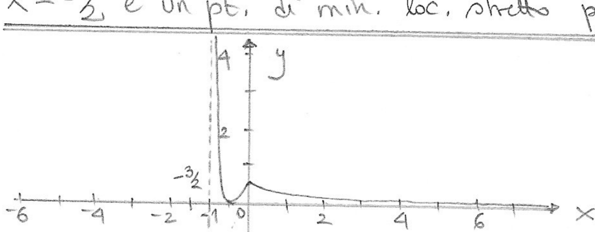
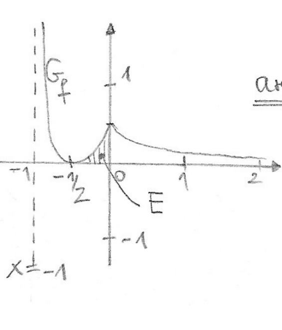


grafico qualitativo di f. □

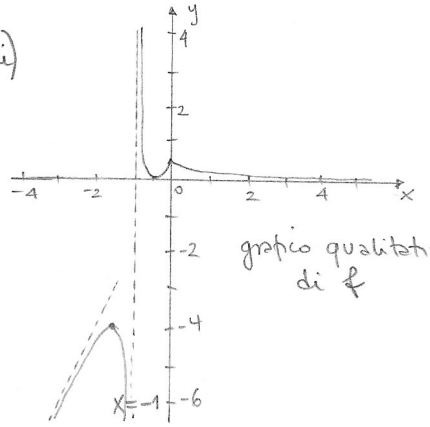
ii)

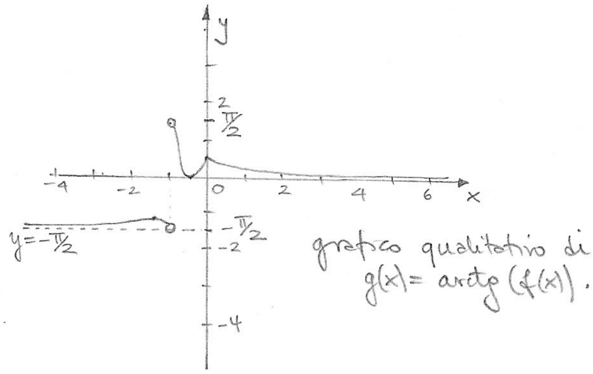


$$\underline{\text{area} E} = \int_{-\frac12}^{0} \left(2x + \frac{1}{2(x+1)}\right) dx = \left[x^2 + \frac12 \log|x+1|\right]_{-\frac12}^{0} = -\frac14 - \frac12\log\frac12 =$$

$$= \underline{\log\sqrt2 - \tfrac14}.$$ □

iii)





b3) i) Oss. che $a_n \doteq (4n^3+\log n)\sin\left(\frac{1}{2n^3+\alpha n^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \begin{cases} 4n^3\cdot\frac{1}{2n^3} & \text{se } 0\le\alpha<3 \\ 4n^3\cdot\frac{1}{5n^3} & \text{se } \alpha=3 \\ 4n^3\cdot\frac{1}{\alpha n^\alpha} & \text{se } \alpha>3. \end{cases}$

Quindi, dal criterio del confronto asintotico,

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(4n^3+\log n)\sin\left(\frac{1}{2n^3+\alpha n^\alpha}\right) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0\le\alpha<3 \\ 4/5 & \text{se } \alpha=3 \\ 0 & \text{se } \alpha>3. \end{cases}$$

ii) Oss. che $\sum_{n=1}^{+\infty}(4n^3+\log n)\sin\left(\frac{1}{2n^3+\alpha n^\alpha}\right)$ è una serie, il cui termine generale a_n è positivo per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\geq 0$. Notiamo che la condizione necessaria per la convergenza di una serie, ossia $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$, viene soddisfatta dalla serie data solo per $\alpha>3$. Inoltre $a_n \sim \frac{4n^3}{\alpha n^\alpha} = \frac{4}{\alpha n^{\alpha-3}}$ per $n\to+\infty$, che è il termine generale di una serie armonica generalizzata. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie data converge se e solo se $\alpha-3>1$, ossia $\underline{\underline{\alpha>4}}$ (e diverge positivamente altrimenti).

b4) $\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} 2x^\alpha}{x^2\log(1+\sqrt[4]{x})}}_{f(x)}\,dx$ $\qquad f(x):]0,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ continua, $f(x)>0$.

Ricordando che $\operatorname{arctg} t = t+o(t)$ per $t\to 0$ e $\log(1+t)=t+o(t)$ per $t\to 0$, abbiamo che

per $x\to 0^+$ $(\alpha>0)$ $\quad f(x)\sim\frac{2x^\alpha}{x^2\sqrt[4]{x}} = \frac{2}{x^{2+1/4-\alpha}}$.

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^{9/4-\alpha}}dx<+\infty \iff 9/4-\alpha<1 \iff \alpha>5/4$, per il criterio del confronto asintotico anche $\int_0^1 f(x)dx<+\infty \iff \alpha>5/4$.

D'altra parte, per $x \geq 1$, possiamo osservare che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$0 < f(x) \leq \frac{\pi/2}{x^2 \log 2} .$$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$, per il criterio del confronto, anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.

In definitiva, l'integrale improprio proposto è convergente se e solo se $\underline{\alpha > 5/4}$.

b5) $\begin{cases} y' = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{=a(x)} y + \underbrace{\sin x}_{=b(x)} \\ y(\pi) = 2 . \end{cases}$ $\leftarrow$ l'eq. diff. proposta è lineare del primo ordine con $a(x) = -\frac{1}{x}$ continua su $]0,+\infty[$

$b(x) = \sin x$ continua su $]0,+\infty[$.

Applicando la formula risolutiva si ottiene su $]0,+\infty[$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(c + \int \sin x \, e^{-A(x)}\,dx\right) \qquad c \in \mathbb{R},$$

dove $A(x) = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\log x$; quindi

$$y(x) = e^{-\log x}\left(c + \int \sin x \, e^{\log x}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(c + \int x \sin x \, dx\right) \underset{\text{integrando per parti}}{=} \frac{1}{x}\left(c - x\cos x + \int \cos x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(c - x\cos x + \sin x\right),$$

ossia

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(c - x\cos x + \sin x\right), \quad c \in \mathbb{R} \text{ è l'integrale generale}$$

dell'eq. diff. data su $]0,+\infty[$. Imponendo $y(\pi) = 2$, si ottiene $2 = \frac{1}{\pi}(c + \pi)$, ossia $c = \pi$. In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy risulta essere $\underline{y(x) = \frac{\pi}{x} - \cos x + \frac{1}{x}\sin x \text{ su }]0,+\infty[}$.

b6) i) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice <u>primitiva</u> di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se F è derivabile su $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Scrivere l'enunciato e la dim. del <u>teorema di Rolle</u>:

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione t.c. f è continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$ e $f(a) = f(b)$; allora $\exists c \in]a,b[\; : \; f'(c) = 0$.

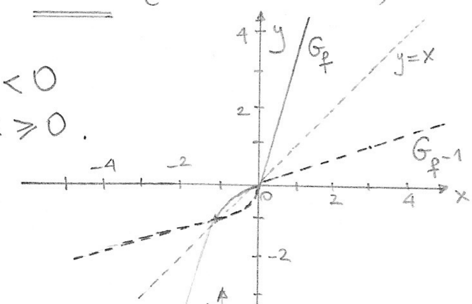
FILA (B) a1) $-x-\frac{1}{2x}<0 \iff x+\frac{1}{2x}>0 \iff \frac{2x^2+1}{2x}>0$. Si ha quindi
$A=\{x\in\mathbb{R}: -x-\frac{1}{2x}<0\} =]0,+\infty[$. Quindi vale i), ossia A è limitato solo inferiorm. $\square$

a2) $A=\{x_n=(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2};\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 1\} = \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{36}, \dots\} =$
$= \{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{36}, \dots, \frac{1}{25}, \frac{1}{9}\}$. Ne segue che $\min A = -\frac{1}{4}$, $\max A = \frac{1}{9}$. $\square$

a3) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow z^4 = \cos(4\cdot(-\frac{\pi}{4})) + i\sin(4\cdot(-\frac{\pi}{4})) = -1$. $\square$

a4) $f(x)=\frac{1}{\log(1-x)}$: $\operatorname{dom} f = \{x\in\mathbb{R}: 1-x>0,\ 1-x\neq 1\} =]-\infty,1[\ \setminus\{0\}$. $\square$

a5) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{se } x<0 \\ 3x & \text{se } x\geq 0. \end{cases}$

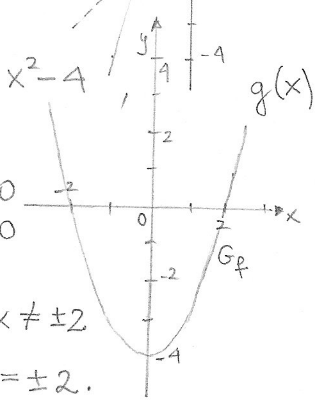


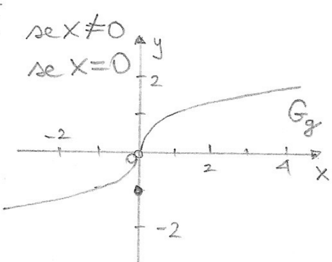
$\square$

a6) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$, $g(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x\neq 0 \\ -1 & \text{se } x=0 \end{cases}$

$(g\circ f)(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{f(x)} & \text{se } f(x)\neq 0 \\ -1 & \text{se } f(x)=0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \sqrt[3]{x^2-4} & \text{se } x\neq \pm 2 \\ -1 & \text{se } x=\pm 2. \end{cases}$





$\square$

a7) $f(x)=\log(1+2x)-\sin x \underset{\uparrow}{=} (2x)-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}+o(x^3)-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$
$\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)$ per $t\to 0$

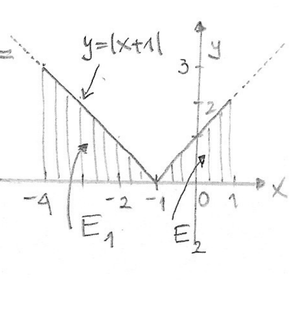
$= x-2x^2+\frac{17}{6}x^3+o(x^3)$ per $x\to 0$. Quindi

$P_3(x)=x-2x^2+\frac{17}{6}x^3$ polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0=0$, di f. $\square$

a8) $F(x)=\int_0^x e^{-2t^2}\,dt \underset{TFC}{\Rightarrow} F'(x)=e^{-2x^2}>0 \Rightarrow$ F è strett. crescente su $\mathbb{R}$. $\square$

a9) $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(x^2-2)n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(e^{x^2-2})^n$ serie geom. Essa è convergente $\iff |e^{x^2-2}|<1$
$\iff e^{x^2-2}<1 \iff e^{x^2-2}<e^0 \underset{e^x\uparrow}{\iff} x^2-2<0 \iff x\in\ ]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$. $\square$

a10) $\int_{-4}^{1}|x+1|\,dx =$



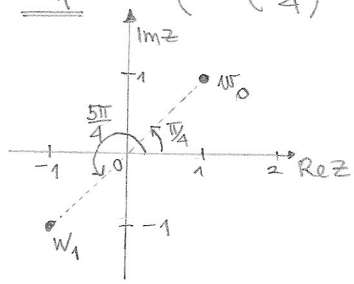
$=$ area E_1 + area E_2 $= \frac{3\cdot 3}{2}+\frac{\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{2}} = \frac{13}{2}$. $\blacksquare$

b1) i) Oss. che l'eq. $w^2 = 2i$ si scrive equivalentemente come $w^2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Le soluzioni (ossia le radici quadrate di $2i$) sono

$$w_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)\right) \quad \text{con } k = 0,1, \text{ ossia}$$

$$\underline{\underline{w_0}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{1+i}} \quad \text{e}$$

$$\underline{\underline{w_1}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{-1-i}}. \qquad \square$$



ii) Oss. che la prima eq. del sistema $(w^2-2i)(w+1)=0$ ha come soluzioni le radici quadrate di $2i$ (vedi i)) e $w=-1$, ossia

$$\underline{\underline{w = 1+i}}, \qquad \underline{\underline{w = -1-i}}, \qquad \underline{\underline{w = -1}}.$$

Dalla seconda equazione $z\overline{w} - i = 0$ ricaviamo $z = \frac{i}{\overline{w}}$, e quindi:

per $w = 1+i$ si ha $z = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$;

per $w = -1-i$ si ha $z = \frac{i}{-1+i} = \frac{i(-1-i)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$;

per $w = -1$ si ha $z = \frac{i}{-1} = -i$. In definitiva, le coppie $(z,w) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ soluzioni del sistema dato sono $\underline{\underline{(z,w) = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\ 1+i\right)}}$,

$\underline{\underline{(z,w) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i,\ -1-i\right)}}$ e $\underline{\underline{(z,w) = (-i,-1)}}$. $\square$

iii) Notiamo che $\left|\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(1+i)\right| = \left|-\frac{1}{2} \cancel{-\frac{1}{2}i} \cancel{+\frac{1}{2}i} - \frac{1}{2}\right| = 1$;

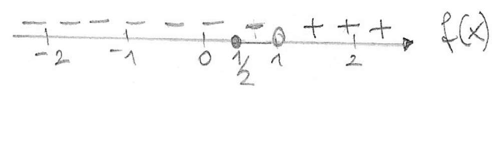
$\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(-1-i)\right| = \left|-\frac{1}{2} \cancel{-\frac{1}{2}i} \cancel{+\frac{1}{2}i} - \frac{1}{2}\right| = 1$, e $|(-i)(-1)| = |i| = 1$.

Questo fatto si deduce facilmente dalla seconda eq. del sistema. Infatti, se (z,w) è soluzione del sistema di eq. dato, da $z\overline{w} - i = 0$ $\Rightarrow |z\overline{w}| = |i| = 1$. Ma $|zw| = |z||w| = |z||\overline{w}| = |z\overline{w}| = 1$, e quindi $|zw| = 1$. $\blacksquare$

b2) $\boxed{f(x) = x + |x| + \frac{1}{2(x-1)}}$ • $\underline{\underline{\text{dom} f}} = \mathbb{R}\setminus\{1\} = \underline{\underline{]-\infty, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[}}$.

Possiamo scrivere
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(x-1)} & \text{se } x < 0 \\ 2x + \dfrac{1}{2(x-1)} = \dfrac{4x^2-4x+1}{2(x-1)} & \text{se } x \geq 0,\ x \neq 1. \end{cases}$$

Oss. che $4x^2-4x+1 = (2x-1)^2$ • $\underline{\underline{\text{segno di } f}}$



- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \underline{\underline{0}}$; $\quad$ $y=0$ è asintoto orizzontale per f, per $x\to-\infty$;

  $\lim_{x\to1^-} f(x) = \underline{\underline{-\infty}}$; $\quad$ $x=1$ è asintoto verticale (da sinistra) per f;

  $\lim_{x\to1^+} f(x) = \underline{\underline{+\infty}}$; $\quad$ $x=1$ è asintoto verticale (da destra) per f;

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \underline{\underline{+\infty}}$; $\quad$ poichè $f(x) = 2x + \frac{1}{2(x-1)}$ se $x \geq 0$, $x\neq 1$ si deduce immediatamente che $y=2x$ è asintoto obliquo per f, per $x\to+\infty$.

- f è continua nel suo dominio, essendo somma e rapporto di funz. continue.

- f è sicuramente derivabile $\forall x \in \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$ e $\forall x \in \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$ si ha

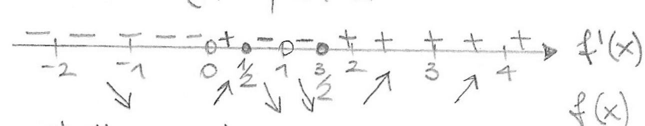
$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(x-1)^2} & \text{se } x<0 \\ 2 - \dfrac{1}{2(x-1)^2} = \dfrac{4(x^2-2x+1)-1}{2(x-1)^2} = \dfrac{4x^2-8x+3}{2(x-1)^2} & \text{se } x>0,\ x\neq 1. \end{cases}$$

Per studiare la derivabilità in $x=0$ calcoliamo il limite per $x\to0$ della funzione $f'(x)$. Essendo f continua in $x=0$, per un corollario del teorema di de l'Hôpital, si ha $f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = -\frac{1}{2}$ e $f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = \frac{3}{2}$.
Risulta quindi che $(0, f(0)) = (0, -\frac{1}{2})$ è un pt. angoloso per f.

- Osserviamo infine che $f'(x)=0 \iff \begin{cases} 4x^2-8x+3 \\ x>0,\ x\neq1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{1/2} = \dfrac{8\pm\sqrt{64-48}}{8} \\ x>0,\ x\neq 1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x_{1/2} = \dfrac{8\pm4}{8} \begin{matrix} \nearrow \frac{3}{2} \\ \searrow \frac{1}{2} \end{matrix} \\ x>0,\ x\neq1 \end{cases} \quad \text{pt. critici per } f$$

$f(\frac{1}{2}) = 0$, $\quad f(\frac{3}{2}) = 4$



$\Rightarrow$ $x=\frac{1}{2}$ è un pt. di max. loc. stretto per f;

$x=\frac{3}{2}$ è un pt. di min. loc. stretto per f.

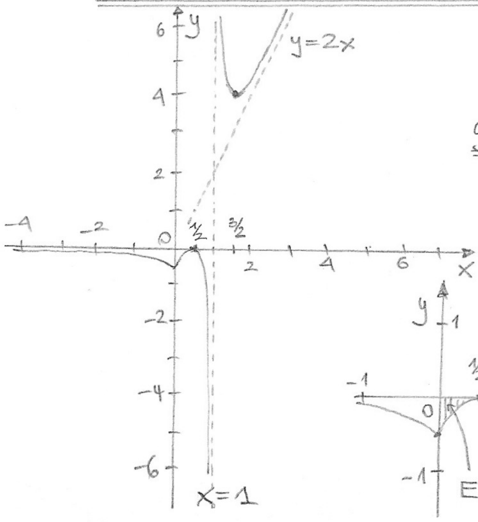
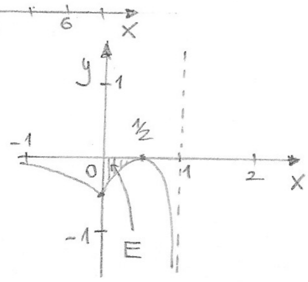


grafico qualitativo di f.

$\square$



$$\text{area } E = \int_0^{1/2} \left[-\left(2x + \frac{1}{2(x-1)}\right)\right] dx = \left[-x^2 - \frac{1}{2}\log|x-1|\right]_0^{1/2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$
$$= \log\sqrt{2} - \frac{1}{4}.$$

$\square$

iii)

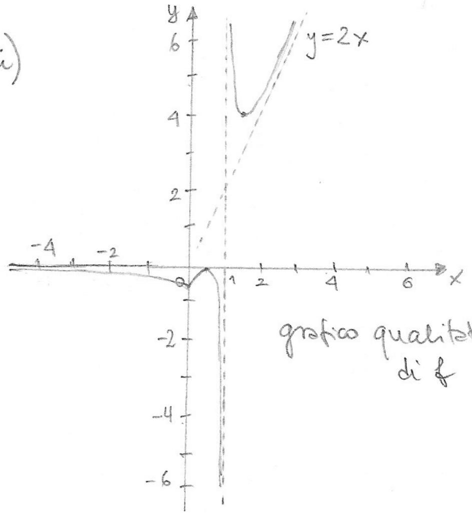


grafico qualitativo di f

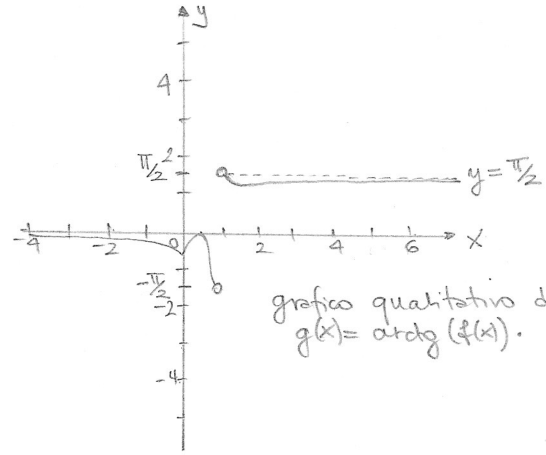


grafico qualitativo di $g(x)=\operatorname{arctg}(f(x))$.

b3) i) Oss. che $a_n \doteq (3n^2-\log n)\sin\left(\frac{1}{4n^2+\alpha n^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \begin{cases} 3n^2\cdot\frac{1}{4n^2} & \text{se } 0\le\alpha<2 \\ 3n^2\cdot\frac{1}{6n^2} & \text{se } \alpha=2 \\ 3n^2\cdot\frac{1}{\alpha n^\alpha} & \text{se } \alpha>2. \end{cases}$

Quindi, dal criterio del confronto asintotico,

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(3n^2-\log n)\sin\left(\frac{1}{4n^2+\alpha n^\alpha}\right)=\begin{cases} 3/4 & \text{se } 0\le\alpha<2 \\ 1/2 & \text{se } \alpha=2, \\ 0 & \text{se } \alpha>2. \end{cases}$$

ii) Oss. che $\sum_{n=1}^{+\infty}(3n^2-\log n)\sin\left(\frac{1}{4n^2+\alpha n^\alpha}\right)$ è una serie, il cui termine generale a_n è positivo per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\geq 0$. Notiamo che la condizione necessaria per la convergenza di una serie, ossia $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$, viene soddisfatta dalla serie data solo per $\alpha>2$. Inoltre $a_n \sim \frac{3n^2}{\alpha n^\alpha}=\frac{3}{\alpha n^{\alpha-2}}$ per $n\to+\infty$, che è il termine generale di una serie armonica generalizzata. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie data converge se e solo se $\alpha-2>1$, ossia $\underline{\underline{\alpha>3}}$ (e diverge positivamente altrimenti).

b4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\underbrace{\frac{\operatorname{arctg} 2x^\alpha}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})}}_{f(x)}dx$ $\qquad f:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ continua, $f(x)>0$.

Ricordando che $\operatorname{arctg} t=t+o(t)$ per $t\to 0$ e $\log(1+t)=t+o(t)$ per $t\to0$, abbiamo che

per $x\to0^+$ $(\alpha>0)$ $\quad f(x)\sim\frac{2x^\alpha}{x^2\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{x^{2+1/3-\alpha}}$.

Poiché $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^{7/3-\alpha}}dx<+\infty \iff \frac{7}{3}-\alpha<1 \iff \alpha>\frac{4}{3}$, per il criterio del confronto asintotico anche $\int_0^1 f(x)\,dx < +\infty \iff \alpha > \frac{4}{3}$. D'altra parte, per $x \geq 1$, possiamo osservare che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$0 < f(x) \leq \frac{\pi/2}{x^2 \log 2}.$$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$, per il criterio del confronto, anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$. In definitiva, l'integrale improprio proposto è convergente se e solo se $\underline{\underline{\alpha > \frac{4}{3}}}$. ■

b5) $\begin{cases} y' = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{=a(x)}\, y + \underbrace{\cos x}_{=b(x)} \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$ ← l'eq. diff. proposta è lineare del primo ordine

con $a(x) = -1/x$ continua su $]0,+\infty[$

$b(x) = \cos x$ continua su $]0,+\infty[$.

Applicando la formula risolutiva si ottiene su $]0,+\infty[$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(c + \int b(x)\, e^{-A(x)}\,dx\right) \quad c \in \mathbb{R},$$

dove $A(x) = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\log x$; quindi

$$y(x) = e^{-\log x}\left(c + \int \cos x\; e^{\log x}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(c + \int x\cos x\,dx\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integrando per} \\ \text{parti}}}{=} \frac{1}{x}\left(c + x\sin x - \int \sin x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(c + x\sin x + \cos x\right),$$

ossia

$y(x) = \frac{1}{x}(c + x\sin x + \cos x)$, $c \in \mathbb{R}$ è l'integrale generale dell'eq. diff. data su $]0,+\infty[$. Imponendo $y(\pi) = 1$, si ottiene $1 = \frac{1}{\pi}(c-1)$, ossia $c = \pi + 1$. In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy risulta essere $\underline{\underline{y(x) = \frac{\pi+1}{x} + \sin x + \frac{1}{x}\cos x \text{ su }]0,+\infty[}}$. ■

b6) i) $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice <u>primitiva</u> di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se F è derivabile su $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. □

ii) Scrivete l'enunciato e la dim. del <u>teorema di Lagrange</u>:

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Allora $\exists c \in]a,b[$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. ■