Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

a.a. 2018–2019 — Trento, 2 luglio 2019

FILA (A)

a1) $A = ]-1,0[ \cup \{2\}$. Insieme dei maggioranti $= [2,+\infty[$
Insieme dei minoranti $= ]-\infty,-1]$.

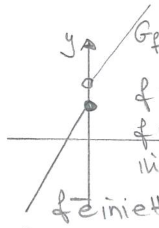
a2) $z = 1+2i$. Si ha $\mathrm{Re}(zi) = \mathrm{Re}(i-2) = -2$.

a3) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione.

i) Se $f$ è strett. crescente, allora $f$ è iniettiva (V): infatti, siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $x_1 \neq x_2$. Supp. $x_1 < x_2$. Allora dalla stretta crescenza di $f$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$, ossia $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ii) Se $f$ è strett. crescente, allora $f$ è continua. (F)

iii) Se $f$ è iniettiva, allora $f$ è continua. (F)

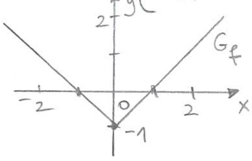


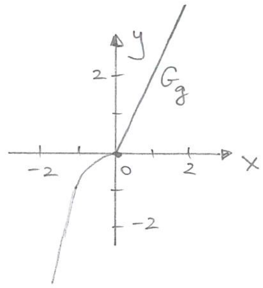

f è strett. cresc.
f non è continua in $x=0$.
f è iniettiva, ma f non è continua in $x=0$.

a4) $f(x) = \sqrt{2^x - 1}$ $\quad \mathrm{dom} f = \{x\in\mathbb{R} : 2^x - 1 \geq 0\} = [0,+\infty[$.

a5) $f(x) = x\log(e^x+3)$ $\quad f'(x) = \log(e^x+3) + \dfrac{x\,e^x}{e^x+3}$ $\quad f'(0) = \log 4$.

a6) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x) = |x|-1$, $\quad g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x<0 \\ 2x & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$




Abbiamo $(g\circ f)(x) \underset{x\in\mathbb{R}}{\overset{\uparrow}{=}} g(f(x))$

$$= \begin{cases} -(f(x))^2 & \text{se } f(x)<0 \\ 2f(x) & \text{se } f(x)\geq 0 \end{cases}$$

$$(g\circ f)(x) = \begin{cases} -(|x|-1)^2 & \text{se } x\in ]-1,1[ \\ 2(|x|-1) & \text{se } x\leq -1 \text{ o } x\geq 1. \end{cases}$$

a7) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{-1/2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

a8) $f(x) = \sin 2x$ $\quad f'(x) = 2\cos 2x$ $\quad f'(\pi) = 2$. Poiché l'eq. della retta tg al grafico di $f$ nel pt. $(\pi,0)$ è data da $y = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi)$ si ha $y = 2x - 2\pi$.

a9) $\displaystyle\int \frac{4x}{1+x^2}\,dx = 2\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx = 2\log(1+x^2) + c, \quad c\in\mathbb{R}$.

a10) $y' = x^2+2$. $\quad y(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x + c$, $c\in\mathbb{R}$ sono tutte le soluzioni dell'eq. diff. data.

b1) Dobbiamo risolvere il sistema di equazioni $\begin{cases} z^2+\bar{z}^2=2 \\ \operatorname{Im}\left[(1-i)z-\bar{z}\right]=1. \end{cases}$

Posto $z = x+iy$, il sistema dato si trasforma in

$$\begin{cases} (x+iy)^2+(x-iy)^2=2 \\ \operatorname{Im}\left[(1-i)(x+iy)-(x-iy)\right]=1, \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x^2+\cancel{2xyi}-y^2+x^2-\cancel{2xyi}-y^2=2 \\ \operatorname{Im}\left[x+iy-ix+y-x+iy\right]=1. \end{cases}$$

Pertanto il sistema risulta

$$\begin{cases} 2x^2-2y^2=2 \\ 2y-x=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x=2y-1 \end{cases} \iff \begin{cases} (2y-1)^2-y^2=1 \\ x=2y-1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 3y^2-4y=0 \\ x=2y-1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \ \text{ o } \ y=4/3 \\ x=2y-1. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi i due numeri complessi $\underline{\underline{z_1=-1}}$ e $\underline{\underline{z_2=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}i}}$. ■

b2) Dobbiamo determinare il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}}$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

Oss. che il limite si presenta nella forma $\frac{0}{\infty-\infty}$. Utilizziamo lo sviluppo di Taylor, centrato in 0, della funzione coseno

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2) \qquad \text{per } t\to 0,$$

operando la sostituzione $t=\frac{1}{n}$ per $n\to+\infty$. Abbiamo dunque

$$\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}} = \frac{\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^\alpha}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^\alpha}{n+1}\cdot n\underbrace{\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right]}_{\to 2}$$

$$\sim \frac{1}{2^\alpha}\frac{1}{n^{2\alpha}}\cdot 2 \qquad \text{per } n\to+\infty.$$

Risulta che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}} = \begin{cases} +\infty & \alpha<0 \\ 2 & \alpha=0 \\ 0 & \alpha>0. \end{cases}$$

■

b3) $\boxed{f(x) = (x^2 - |x|)e^x}$ i) • $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+x)e^x & \text{se } x<0 \\ (x^2-x)e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

• segno di $f$


• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ <u>$y=0$ asintoto orizz. per $f$, per $x \to -\infty$.</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• $f$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo composizione, somma e prodotto di funzioni continue.

• Ovviamente $f$ è derivabile in tutti i punti $x \neq 0$ e

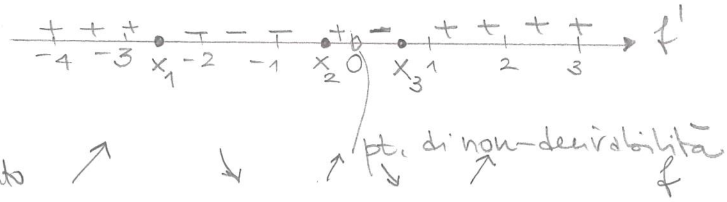
$$f'(x) = \begin{cases} (2x+1)e^x + (x^2+x)e^x & \text{se } x<0 \\ (2x-1)e^x + (x^2-x)e^x & \text{se } x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x^2+3x+1)e^x & \text{se } x<0 \\ (x^2+x-1)e^x & \text{se } x>0. \end{cases}$$

Controlliamo la derivabilità di $f$ in $x=0$. Poiché $f$ è continua in $x=0$ e $\lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = 1$ si ha $f'_-(0) = 1$; analogamente da $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = -1$ segue $f'_+(0) = -1$. Quindi $f$ ha un <u>punto angoloso in $x=0$</u>.

Osserviamo che $f'(x) = 0 \iff x_1 = \dfrac{-3-\sqrt5}{2}$, $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt5}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt5}{2}$. $\Big\}$ punti critici per $f$

$x_1$ pt. di max. loc. stretto con $f(x_1) > 0$;

$x_2$ e $x_3$ pt. di min. loc. stretto con $f(x_2) < 0$, $f(x_3) < 0$.



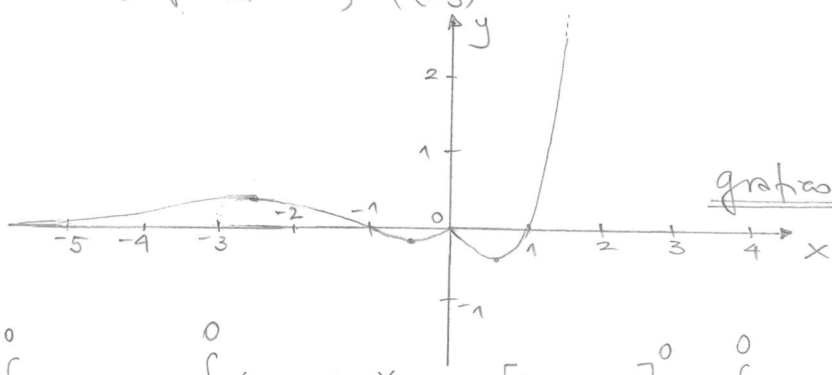




grafico qualitativo di $f$.

□

ii) $$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} \underbrace{(x^2+x)}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = \Big[(x^2+x)e^x\Big]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0}(2x+1)e^x\,dx =$$

$$= -(4-2)e^{-2} - \int_{-2}^{0} \underbrace{(2x+1)}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = -2e^{-2} - \left\{ \Big[(2x+1)e^x\Big]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} 2e^x\,dx \right\}$$

$$= -2e^{-2} - \left\{ 1 + 3e^{-2} - 2e^{x} \Big]_{-2}^{0} \right\} = -2e^{-2} - \left\{ 1 + 3e^{-2} - 2 + 2e^{-2} \right\}$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{7}{e^2}}}.$$

$\square$

iii)

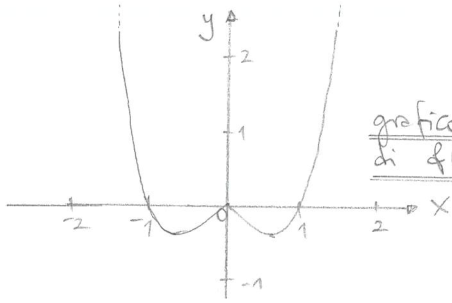



grafico qualitativo di $f(|x|)$

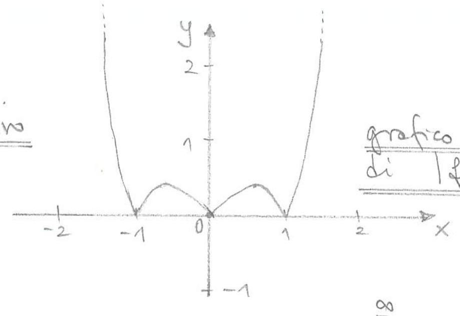



grafico qualitativo di $|f(|x|)|$

$\blacksquare$

b4) Dobbiamo determinare l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2-3)^n}{n}$.

Poniamo $t = x^2-3$ e studiamo la convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{a_n} t^n$. Poiché $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, dal criterio della radice n-esima risulta che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{} \frac{(-1)^n}{n} t^n$ ha raggio di convergenza $r = 1$ e converge sicuramente $\forall t \in ]-1,1[$. Poiché per $t=-1$ si ha

serie armonica divergente! $\rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, mentre per $t = 1$ la serie si riduce a

converge per il criterio di Leibniz! $\rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ possiamo concludere che, in definitiva, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} t^n$ converge $\forall t \in ]-1,1]$. Poiché $-1 < x^2-3 \le 1 \iff$

$\begin{cases} x^2-2>0 \\ x^2-4\le 0 \end{cases}$, risulta che l'insieme di convergenza della serie data è $\underline{\underline{E = [-2,-\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2},2]}}$.

$\blacksquare$

b5) i) $f(x) = \dfrac{3-x}{x^2}$ su $]0,+\infty[$

- segno: $f$: $+$ per $0<x<3$, $0$ in $x=3$, $-$ per $x>3$ (0, 2, 3, 4)
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - (3-x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x^2-6x}{x^4} = \frac{x-6}{x^3}$$

$f'$: $-$ per $0<x<6$, $0$ in $x=6$, $+$ per $x>6$ (0, 3, 6, 8) $\searrow \nearrow$

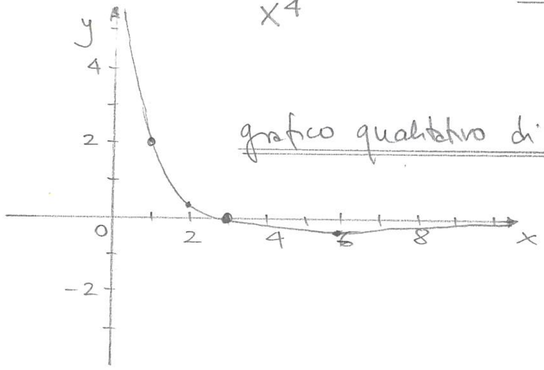



grafico qualitativo di $f$

$x=6$ pt. di minimo stretto per $f$ e $f(6) = -\dfrac{1}{12}$.

$\square$

ii) $A = \{ x_n = f(n) : n \in \mathbb{N}, n \geq \}$. Usando il grafico di $f$ in i)

si ha ottenuto che $\underline{\inf A = \min A = f(6) = -\frac{1}{12}}$

$\underline{\sup A = \max A = f(1) = 2}$.

b6) i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \iff \underline{\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x > M \text{ si ha } |f(x) - 2| < \varepsilon}$

oppure equiv. $\forall$ intorno $V$ di $2$ esiste un intorno $U$ di $+\infty$

tale che $\forall x \in U$ si ha $f(x) \in V$.

ii) Enunciate e provate il teorema di esistenza degli zeri.