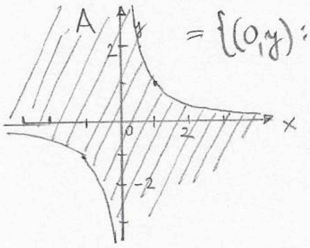
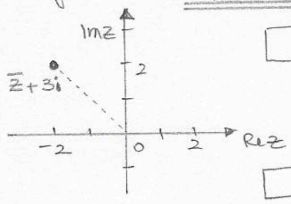
Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica – CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica
ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
a.a. 2019/2020 – Trento, settembre 2020

FILA (A): a1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\le 1\} =$



$= \{(0,y): y\in\mathbb{R}\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y\le \frac{1}{x}\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0,\ y\ge \frac{1}{x}\}$

a2) $\underline{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \underline{1-\frac{1}{n+1}} \nearrow$; $0\le a_n < 1 < \frac{\pi}{2}\ \forall n$.
Poiché $\sin x$ è crescente su $[0,\frac{\pi}{2}]$, segue che $\underline{b_n = \sin a_n}$ $\underline{\text{è crescente}}$.



a3) $z=-2+i$; allora $\overline{z}+3i = -2-i+3i = -2+2i$.

a4) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\le 1 \\ 2-\sin(x-1) & \text{se } x>1 \end{cases}$ è continua in $x=1$?

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = f(1) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$; quindi f non è continua in $x=1$.

a5) $f(x)=\sin x+\cos\sqrt{2x}-1 = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+\cancel{1}-\frac{(\sqrt{2x})^2}{2}+\frac{(\sqrt{2x})^4}{4!}+o((\sqrt{2x})^4)\cancel{-1}$

$= \cancel{x}-\frac{x^3}{3!}-\cancel{x}+\frac{\cancel{4}x^2}{\cancel{4}\cdot 6}+o(x^2) = \frac{x^2}{6}+o(x^2)$ per $x\to 0^+$.

ordine di infinitesimo 2, parte principale $\frac{x^2}{6}$.

a6) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{se } x\le 0 \\ -2 & \text{se } x>0 \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x<0 \\ e^{-x} & \text{se } x\ge 0 \end{cases}$ $\underline{(f\circ g)(x) = f(g(x)) = -2\ \ \forall x\in\mathbb{R}}$

(nota: $g(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$!)

a7) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+e^n}{n-e^{2n}} = \underline{0}$: per la gerarchia degli infiniti, e $\frac{e^n}{e^{2n}}=\frac{1}{e^n}$.

a8) $F(x)=\int_0^{2x}\sqrt{4+t^2}\,dt$; quindi $F'(x)=2\sqrt{4+(2x)^2}\ \forall x\in\mathbb{R}$; perciò

$\underline{F'(0)} = 2\sqrt{4} = \underline{4}.$

a9) $\int \frac{4}{x^2+1}\,dx = \underline{4\arctan x + c}$, $c\in\mathbb{R}$.

a10) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{1/4}}\,dx < +\infty$, poiché $f(x)=\frac{1}{(x-2)^{1/4}} :]2,3] \to \mathbb{R}$ positiva e continua e $f(x)=\frac{1}{(x-2)^{\alpha}}$ con $\alpha=\frac{1}{4}<1$.

b1) $f : [-1, e] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{se } x \in [-1,1] \\ 2\log x + 1 & \text{se } x \in]1, e]. \end{cases}$

i) f è continua in tutti i pt. $x \in \operatorname{dom} f \setminus \{1\}$, poiché prodotto e somma di funzioni continue. Dobbiamo quindi controllare la continuità di f solo nel pt. $x = 1$. Poiché $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x|x| = 1 = f(1)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2\log x + 1) = 1$, possiamo asserire che f è continua anche in $x = 1$.

Nota: (anche la deriv. in $x = 0$ sarebbe da controllare!! In questo caso l'abbiamo data per buono visto che è già stata studiata in altre occasioni. In ogni caso si verifica come la derivabilità in $x = 1$)

La funzione f ristretta agli intervalli $]-1, 1[$ e $]1, e[$ è derivabile, poiché è ottenuta con somme, composizioni e prodotti di funzioni derivabili.

Osserviamo che la derivata prima f' di f per $x \neq 1$ è data da

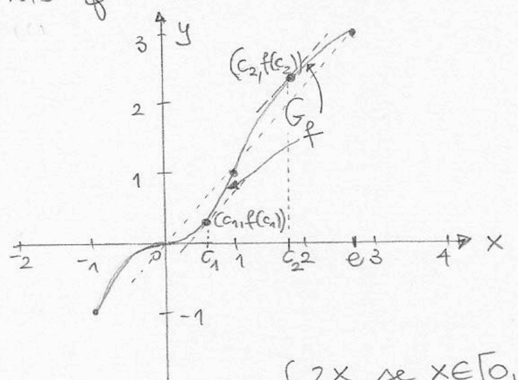
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x \in]-1, 0[\\ 2x & \text{se } x \in [0, 1[\\ \frac{2}{x} & \text{se } x \in]1, e[. \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x = 1$ e derivabile in $]-1, e[\setminus \{1\}$, dal corollario del teorema di de L'Hôpital otteniamo

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x) = 2 \quad \text{e} \quad f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{2}{x}\right) = 2.$$

Perciò f è derivabile in $x = 1$ e $f'(1) = 2$. $\square$

ii)



iii) $(0, f(0)) = (0, 0)$

$(e, f(e)) = (e, 3)$

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(0)}{e - 0} = \frac{3}{e} \quad \text{[teorema di Lagrange]}$$

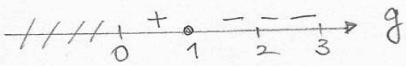
Oss. che $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0, 1] \\ \frac{2}{x} & \text{se } x \in [1, e]. \end{cases}$ Per determinare tutti i punti richiesti risolviamo l'eq. $f'(x) = \frac{3}{e}$. Abbiamo $2x = \frac{3}{e} \iff x = \frac{3}{2e}$ e $\frac{2}{x} = \frac{3}{e} \iff x = \frac{2e}{3}$. Poiché $\frac{3}{2e} \in [0, 1]$ e $\frac{2e}{3} \in [1, e]$, questi due pt. sono tutti i pt. c richiesti.

Nel disegno sopra sono tracciate le rette tg. al grafico di f nei punti $(c_1, f(c_1))$ e $(c_2, f(c_2))$: esse sono parallele alla retta passante per $(0, f(0))$ e $(e, f(e))$.

b2) i) $\boxed{f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}}$

- $\underline{\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[}$
- $\underline{f \text{ è pari}}$: infatti, f è definita su un insieme simmetrico rispetto all'origine e $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Quindi basta studiare $g(x) = f|_{[0,+\infty[}(x)$ $\forall x \in [0, +\infty[$, e il grafico di f si ottiene per simmetria!

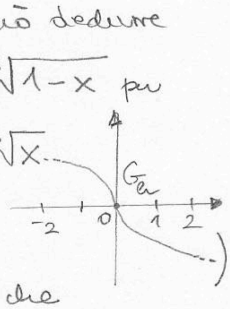


- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \underline{\underline{-\infty}}$; non ci sono asintoti obliqui, poiché
$$g(x) \sim -\sqrt[3]{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty .$$
- g è continua su $[0, +\infty[$ essendo somma e composizione di funzioni continue su $\mathbb{R}$.
- g è derivabile su $]0, +\infty[\setminus \{1\}$, e $g'(x) = \dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$ $\forall x \in]0, +\infty[$, $x \neq 1$

Essendo g continua su $[0, +\infty[$ e deriv. su $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ si ottiene (coroll. del teorema di de L'Hôpital)

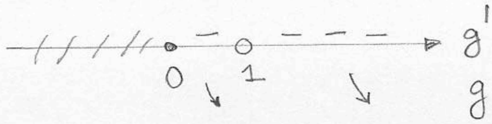
$g'_+(0) = 0$ e $g'(1) = \lim_{x \to 1} g'(x) = -\infty$. Risulta che il pt. $(1, 0)$ è un pt. con tangente verticale al grafico di g.

(Oss. che questo comportamento di g in $x = 1$ si può dedurre facilmente dal fatto che $g(x) = \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} \sim \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{1-x}$ per $x \to 1$ e $\sqrt[3]{1-x} = -\sqrt[3]{x-1} = h(x-1)$ con $h(x) = -\sqrt[3]{x}$.



)

- Poiché $g'_+(0) = 0$ e f è una funzione pari su $\mathbb{R}$, risulta che $x = 0$ è l'unico pt. critico per f; inoltre $f(0) = 1$; $x = 0$ pt. di max (stretto) per g (e per f).



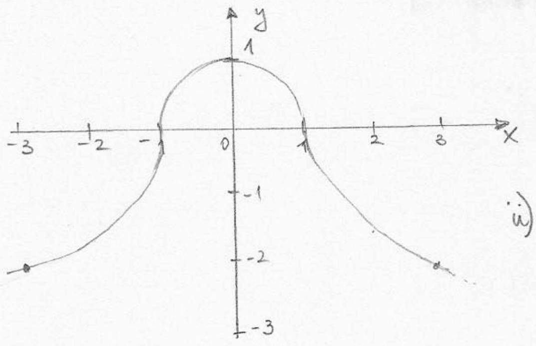


grafico qualitativo di f. □

ii) L'eq. della retta tg. al grafico di f in $(0,1)$ è $y=1$;

l'eq. della retta tg. al grafico di f in $(1,0)$ è $x=1$. ■

b3) Dobbiamo calcolare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, il limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt[3]{n}}\right)^n$.

Forma indetermin. $[1^\infty]$

Possiamo scrivere più semplicemente, per $n\to+\infty$

$$\left(1+\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt[3]{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^{\alpha+1/3}}\right)^n = e^{n\log\left(1+\frac{1}{n^{\alpha+1/3}}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n^{\alpha+1/3}}+o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1/3}}\right)\right)}$$

$$= e^{\left(\frac{1}{n^{\alpha-2/3}}+o\left(\frac{1}{n^{\alpha-2/3}}\right)\right)}.$$

Quindi
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt[3]{n}}\right)^n = \begin{cases} +\infty & \alpha<2/3 \\ e & \alpha=2/3 \\ 1 & \alpha>2/3 \end{cases}.$$ ■

b4) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{3n\log n}$: osserviamo che la serie data è una serie di potenze $\sum_{n=2}^{+\infty}a_n(x-1)^n$ con i coefficienti $a_n=\frac{1}{3n\log n}$.

Usando il teorema di determinazione del raggio di convergenza x appartiene all'insieme di convergenza E se vale $|x-1|<R$, dove

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{3}n\log n}{\cancel{3}(n+1)\log(n+1)} = 1,$$

ossia se $x\in\,]0,2[$. Al contrario la serie non converge se $|x-1|>1$.

Rimane da controllare il carattere della serie al bordo dell'intervallo, ovvero per $x=0$ e $x=2$.

Per $x=0$, la serie data risulta $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n\log n}$. Essa è una serie a termini alternanti e converge grazie al criterio di Leibniz poiché la successione dei termini $\frac{1}{3n\log n}$ è positiva, è infinitesima e decrescente.

Per $x = 2$, la serie risulta $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3n\log n}$ che non è convergente.

Possiamo allora concludere che la serie proposta è convergente per x in

$E = [0,2[$.

b5) i) Dobbiamo determinare la soluzione del pbm. di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2(e^x + 2x) \\ y(0) = -1 . \end{cases}$$

Notiamo che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'eq. diff. data, ma non soddisfa $y(0) = -1$.

Se $y(x) \neq 0$ (dal teorema di esistenza ed unicità locale per il pbm. di Cauchy nessun'altra soluzione assume il valore 0), allora abbiamo

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = e^x + 2x, \quad \text{da cui} \quad \int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = \int (e^x + 2x)\,dx.$$

Ne segue che $-\frac{1}{y(x)} = e^x + x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ e quindi $y(x) = \frac{-1}{e^x + x^2 + c}$, $c \in \mathbb{R}$.

Imponendo la condizione $y(0) = -1$ si ottiene l'unica soluzione del pbm. di Cauchy dato $y(x) = -\frac{1}{e^x + x^2}$ $x \in \mathbb{R}$.

ii) Risulta che $y = 0$ è l'eq. dell'asintoto per f, per $x \to -\infty$, e anche per $x \to +\infty$.

b6) i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strett. crescente su $\mathbb{R}$ se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))]$.

ii) Teorema di Torricelli-Barrow: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

Sia G una primitiva di f su $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$