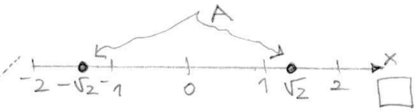
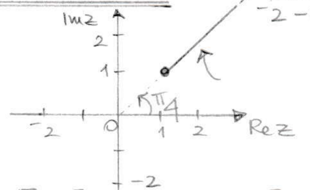
Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica – CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica
ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
a.a. 2019/2020 – Trento, giugno 2020

FILA (A) : a1) $A=\{x\in\mathbb{R}: |x^2-2|\le 0\}$. Oss. che $|x^2-2|\le 0 \iff |x^2-2|=0 \iff x^2-2=0$.

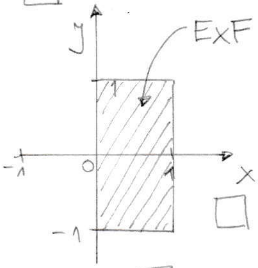
Quindi $\underline{A=\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}}$ ; A non è un intervallo.




a2) $z\in\mathbb{C}$ : $\operatorname{Im} z \ge 1$ e $\arg z = \frac{\pi}{4}$




a3) $E\times F$, dove $E=\{x\in\mathbb{R}: x^2\le x\}=[0,1]$ e $F=[-1,1]$.




a4) $\arcsin(2x-1)\ge 0 \iff 0\le 2x-1\le 1$

$\Rightarrow \underline{S=\left[\frac{1}{2},1\right]}$.

a5) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n^3}{\log(n^2+1)}=\underline{\frac{3}{2}}$ ; infatti $\frac{\log n^3}{\log(n^2+1)}=\frac{3\log n}{2\log n+\log(1+\frac{1}{n^2})}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{3}{2}$.

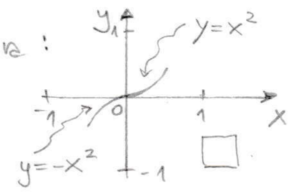
a6) $f(x)=x^3-\alpha x$ : $f'(x)=3x^2-\alpha$. Allora $f'(1)=0 \iff 3-\alpha=0$

ossia $\underline{\alpha=3}$.

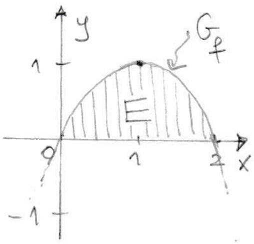
a7) $f(x)=|x|\sin x$ ; per x vicino a 0 si ha $\sin x\sim x$ e quindi

$f(x)\sim |x|x$ per x vicino a 0. Abbiamo quindi che f

in un intorno di 0 si rappresenta come in figura:




a8)




$$f(x)=-x^2+2x=-(x^2-2x)=-(x-1)^2+1$$

$$\operatorname{area}(E)=\int_0^2(-x^2+2x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=-\frac{8}{3}+4=\underline{\frac{4}{3}}.$$

a9) $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x}\,dx$ : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x}: ]0,1]\to\mathbb{R}$ continua, positiva.

Abbiamo $f(x)\sim\frac{\sqrt{x}}{x^2}=\frac{1}{x^{3/2}}$ per $x\to 0^+$.

Poiché $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge se e solo se $\alpha<1$, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio dato non è convergente; è divergente positivo.

a10) $\sum_{n=0}^{+\infty}3^{-n}=\underline{\frac{3}{2}}$. Infatti, è una serie geom. con ragione $q=\frac{1}{3}$; risulta che

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

b1) Per risolvere l'eq. $z\bar{z} - z + i a = 0$ al variare di $a \in \mathbb{R}$, poniamo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ da determinare in modo tale che $z$ risolva l'equazione. Inserendo $z = x + iy$ nell'eq. otteniamo l'eq.
$x^2 + y^2 - (x + iy) + i a = 0$, ossia $(x^2 - x + y^2) + i(-y + a) = 0$.
Quest' ultima eq. è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - x + y^2 = 0 \\ -y + a = 0, \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x^2 - x + y^2 = 0 \\ y = a. \end{cases}$$

Ora $$\begin{cases} x^2 - x + y^2 = 0 \\ y = a \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x + a^2 = 0 \\ y = a \end{cases} \iff \begin{cases} x_{1/2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2}}{2} \\ y = a \end{cases}$$

Ne segue che

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4a^2}}{2} + i a, \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4a^2}}{2} + i a$$

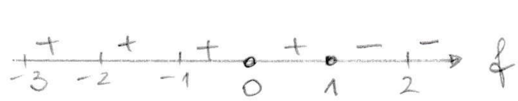
sono le due soluzioni dell'eq. data se $1 - 4a^2 > 0$, ossia $a \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$;

$z = \frac{1}{2} + i a$ è l'unica soluzione dell'eq. data se $a \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

Non esistono soluzioni dell'eq. data se $a \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

b2) $\boxed{f(x) = \sqrt{|x|} - x}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$
- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} - x & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} - x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$




- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Oss. che $f$ non ammette asintoti obliqui né per $x \to -\infty$, né per $x \to +\infty$. Infatti $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{-x} - x}{x} = \underset{a}{-1}$, e
$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{-x} - \cancel{x} + \cancel{x}] = +\infty$ !! Analog. per $x \to +\infty$.

- $f$ è continua su $\mathbb{R}$ essendo composizione e somma di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

• $f$ è derivabile in tutti i pt. $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Osserviamo che la derivata prima $f'$ di $f$ per $x \neq 0$ è data da $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} - 1 & \text{se } x<0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 & \text{se } x>0. \end{cases}$

Poiché $f$ è continua in $x=0$ e derivabile $\forall\, x \neq 0$, dal corollario del teorema di de l'Hôpital otteniamo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left[-\frac{1}{2\sqrt{-x}} - 1\right] = -\infty \quad \text{e}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right] = +\infty.$$

Perciò $f$ non è derivabile in $x=0$ e $(0,0)$ è una cuspide per $f$.

• Abbiamo $f'(x) = \begin{cases} \frac{-1-2\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x<0 \\ \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & \text{se } x>0. \end{cases}$ Risulta $f'(x)=0 \iff$

$$\begin{cases} 1-2\sqrt{x}=0 \\ x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=\frac{1}{4} \text{ unico pt. critico per } f$$

$$f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \sqrt{\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}.$$

$f'$: $-\ -\ -\ 0\ +\ \tfrac14\ -\ -\ -$ (tacche $-2, -1, 0, \tfrac14, 1, 2$)

$f$: $\searrow\ \nearrow\ \searrow$

$x=\frac{1}{4}$ pt. di max loc. stretto per $f$.

• $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\sqrt{-x^3}} & \text{se } x<0 \\ -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

$f''$: $-\ -\ 0\ -\ -$ (tacche $-1, 0, 1$)

$f$: $\frown\ \ \frown$

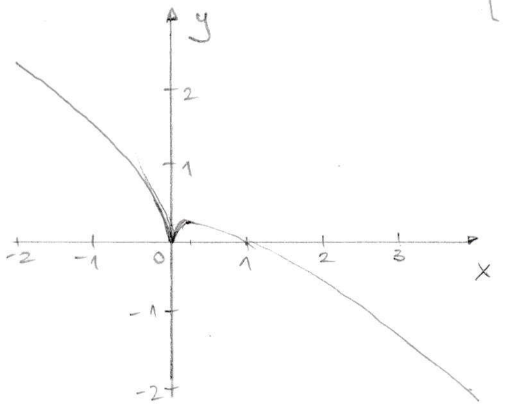


grafico qualitativo di $f$.

ii)

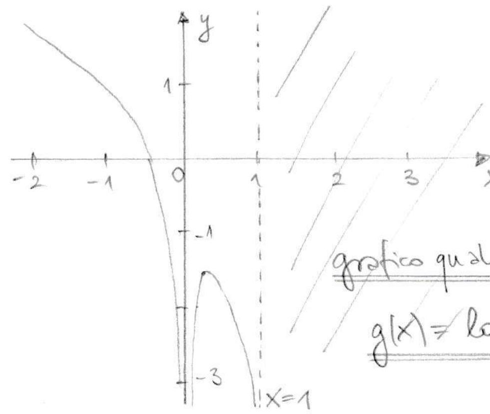


grafico qualitativo di $g(x) = \log(f(x))$.

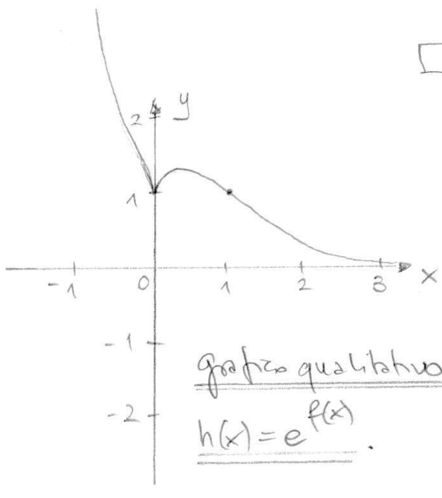


grafico qualitativo di $h(x) = e^{f(x)}$.

b3) Ricordando che $\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 1/n}{1/n} = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 0 = 1$, il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per calcolarlo usiamo gli sviluppi di Taylor. Poiché il denominatore è $\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4$ e $\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4 \sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4 = \frac{1}{n^2}$ per $n\to+\infty$, è sufficiente sviluppare il numeratore fino al secondo ordine. Tenendo conto degli argomenti che verranno inseriti al posto di $t$ negli sviluppi per $t\to0$ delle funzioni elementari $\operatorname{arctg} t$ e $\cos t$ e del fatto che l'arcotangente è moltiplicato per $n$, dobbiamo considerare i seguenti sviluppi:

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t\to0.$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{6n^2}}{\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\alpha}{6n^2}}{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n^2} - \frac{\alpha}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha}{6}\right) + \frac{o(1/n^2)}{1/n^2}}{1 + \frac{o(1/n^2)}{1/n^2}}.$$

Tale limite esiste quindi finito e diverso da zero se e solo se $1-\alpha \neq 0$, cioè per $\underline{\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}}$. ■

b4) i) Osserviamo che la funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-3}}$ è positiva e continua sull'intervallo di integrazione $]3,+\infty[$. Per studiare la convergenza dell'integrale improprio è sufficiente quindi studiare il comportamento asintotico di $f(x)$ agli estremi dell'intervallo. Oss. che

$f(x) \sim \frac{1}{3\sqrt{x-3}}$ per $x\to3^+$ e $f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ per $x\to+\infty$.

Spezziamo quindi l'integrale sui due intervalli $]3,4]$ e $[4,+\infty[$. Poiché $\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx$ e $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ sono convergenti, per il criterio del confronto asintotico anche gli integrali $\int_3^4 f(x)dx$ e $\int_4^{+\infty} f(x)dx$ sono convergenti. In definitiva, l'integrale improprio proposto è <u>convergente.</u> □

ii) Osserviamo che $$\int \frac{1}{x\sqrt{x-3}}dx \underset{\substack{\sqrt{x-3}=t\\ x=t^2+3\\ dx=2t\,dt}}{=} \int \frac{1}{(t^2+3)\cancel{t}}\cdot 2\cancel{t}\,dt = 2\int\frac{1}{t^2+3}dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \, dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}\right) + c \, .$$

Quindi

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-3}} \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{3+\varepsilon}^{4} f(x)\,dx + \lim_{M \to +\infty} \int_4^M f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}\right)\right]_{3+\varepsilon}^{4} + \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}\right)\right]_4^M$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{\cancel{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \, .$$ ■

b5) L'eq. diff. data è lineare di primo ordine della forma $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ con $a(x) = 2$ e $b(x) = xe^{3x}$, definite su $\mathbb{R}$ e continue su $\mathbb{R}$. Ricordando la formula risolutiva, tutte le soluzioni dell'eq. diff. su $\mathbb{R}$ sono della forma

$$y(x) = e^{A(x)} \left( c + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right),$$

dove $A(x) = \int a(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x$, e $c \in \mathbb{R}$ arbitraria. Abbiamo quindi

$$y(x) = e^{2x}\left(c + \int x e^{3x} e^{-2x} dx\right)$$
$$= e^{2x}\left(c + \int x e^{x} dx\right)$$
$$= e^{2x}\left(c + x e^{x} - \int e^{x} dx\right) \quad \text{(integrazione per parti)}$$
$$= e^{2x}\left(c + x e^{x} - e^{x}\right).$$

Ora imponendo $y(0) = 1$, si ottiene $1 = c - 1$, e quindi $c = 2$.

In definitiva, la soluzione del probl. di Cauchy dato è $\underline{y(x) = 2e^{2x} + (x-1)e^{3x}, \; x \in \mathbb{R}}$.

b6) i) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ si dice <u>iniettiva su $[0,1]$</u> se $\forall x_1, x_2 \in [0,1]$, $[x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$ o, equivalentemente, se $\forall x_1, x_2 \in [0,1]$, $[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$. □

ii) Siano $f, g : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in ]a,b[$. Allora $fg$ è derivabile in $x_0$ e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. ■