COGNOME ______________________

NOME ______________________

MATRICOLA

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CdL IN INFORMATICA - CdL IN ING. INFORMATICA, DELLE COMUNICAZIONI ED ELETTRONICA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2019-2020 — TRENTO, 9 GENNAIO 2020

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : -x - \frac{1}{2x} > 0\}$. Dite se A è
i) limitato solo inferiormente; ii) limitato solo superiormente; iii) limitato.

Risposta:

a2) Sia $A = \{x_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Determinate $\min A$ e $\max A$.

Risposta:

a3) Sia $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$. Determinate z^4.

Risposta:

a4) Determinate il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\log(x-1)}$.

Risposta:

a5) Sia $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{se } x < 0 \\ x^2+1 & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$ Rappresentate graficamente la funzione inversa f^{-1}.

Risposta:

---

a6) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$
Determinate la funzione composta $(g \circ f)(x)$.

Risposta:

---

a7) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = e^{2x} - \sin x$.

Risposta:

---

a8) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{2t^2}\,dt$. Determinate la sua monotonia.

Risposta:

---

a9) Determinate gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(1-x^2)n}$ risulta convergente.

Risposta:

---

a10) Determinate $\displaystyle\int_{-1}^{4} |x-1|\,dx$.

Risposta:

---

b1) i) Determinate in forma algebrica le soluzioni dell'equazione $z^2 = -2i$ e rappresentatele nel piano di Gauss.
ii) Determinate le soluzioni $(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} (z^2+2i)(z-1)=0 \\ w\overline{z}-i=0 \end{cases}$$

esprimendole in forma algebrica.
iii) Verificate che le soluzioni (z,w) ottenute al punto ii) soddisfino $|zw| = 1$. Questo fatto si può dedurre facilmente dal sistema di cui sono soluzioni?

---

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione

$$f(x) = x - |x| + \frac{1}{2(x+1)}\,.$$

Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.
ii) Determinate l'area della regione del piano E compresa tra il grafico della funzione $f(x)$ con $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$ e l'asse delle ascisse.
iii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $g(x) = \arctan(f(x))$.

---

b3) i) Calcolate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} (4n^3 + \log n)\sin\Big(\frac{1}{2n^3+\alpha n^\alpha}\Big)\,.$$

ii) Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (4n^3 + \log n)\sin\Big(\frac{1}{2n^3+\alpha n^\alpha}\Big)\,.$$

---

b4) Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x^\alpha}{x^2\log(1+\sqrt[4]{x})}dx\,.$$

---

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{x}y + \sin x \\ y(\pi) = 2\,. \end{cases}$$

---

b6) i) La funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *primitiva* di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Rolle.

COGNOME ______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN ING. INFORMATICA, DELLE COMUNICAZIONI ED ELETTRONICA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2019-2020 — TRENTO, 9 GENNAIO 2020

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : -x - \frac{1}{2x} < 0\}$. Dite se A è

i) limitato solo inferiormente; ii) limitato solo superiormente; iii) limitato.

Risposta:

a2) Sia $A = \{x_n = (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2}; n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Determinate $\min A$ e $\max A$.

Risposta:

a3) Sia $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$. Determinate z^4.

Risposta:

a4) Determinate il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\log(1-x)}$.

Risposta:

a5) Sia $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ 3x & \text{se } x \geq 0 \, . \end{cases}$ Rappresentate graficamente la funzione inversa f^{-1} .

Risposta:

a6) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \, . \end{cases}$
Determinate la funzione composta $(g \circ f)(x)$.

Risposta:

a7) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = \log(1 + 2x) - \sin x$.

Risposta:

a8) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-2t^2} \, dt$. Determinate la sua monotonia.

Risposta:

a9) Determinate gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(x^2-2)n}$ risulta convergente.

Risposta:

a10) Determinate $\displaystyle\int_{-4}^{1} |x + 1| \, dx$.

Risposta:

b1) i) Determinate in forma algebrica le soluzioni dell'equazione $w^2 = 2i$ e rappresentatele nel piano di Gauss.
ii) Determinate le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} (w^2 - 2i)(w + 1) = 0 \\ z\overline{w} - i = 0 \end{cases}$$

esprimendole in forma algebrica.
iii) Verificate che le soluzioni (z, w) ottenute al punto ii) soddisfino $|zw| = 1$. Questo fatto si può dedurre facilmente dal sistema di cui sono soluzioni?

---

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione

$$f(x) = x + |x| + \frac{1}{2(x-1)}\,.$$

Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.
ii) Determinate l'area della regione del piano E compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione $f(x)$ con $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
iii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $g(x) = \arctan(f(x))$.

---

b3) i) Calcolate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} (3n^2 - \log n) \sin\Big(\frac{1}{4n^2 + \alpha n^\alpha}\Big)\,.$$

ii) Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (3n^2 - \log n) \sin\Big(\frac{1}{4n^2 + \alpha n^\alpha}\Big)\,.$$

---

b4) Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x^\alpha}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})}\,dx\,.$$

---

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{x} y + \cos x \\ y(\pi) = 1\,. \end{cases}$$

---

b6) i) La funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *primitiva* di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Lagrange.
