COGNOME ______	NON SCRIVERE QUI	A
NOME ______	1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN ING. INFORMATICA, DELLE COMUNICAZIONI ED ELETTRONICA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2019-2020 — TRENTO, 30 GENNAIO 2020

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Non usate il colore rosso.

a1) Siano $A = [-2, 3[$ e $B =]-\infty, 1[$. Determinate $\inf(A \setminus B)$.

Risposta:

a2) Rappresentate graficamente nel piano complesso l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} < 1\}$.

Risposta:

a3) Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \in [0, 1[\\ -x + \frac{3}{2} & \text{se } x \in [1, 2]. \end{cases}$ Determinate l'immagine di f.

Risposta:

a4) Determinate tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il limite $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$ risulta finito.

Risposta:

a5) Determinate le equazioni degli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{2}{x+3} + 1$.

Risposta:

---

a6) Sia $f(x) = 2e^x + \arctan x$. Determinate l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto $(2,0)$.

Risposta:

---

a7) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \int_0^x \cos t\,dt}{x^3}$.

Risposta:

---

a8) Determinate $\displaystyle\int \Big(\frac{\log x}{x} - 2x\Big)\,dx$.

Risposta:

---

a9) Determinate gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n}$ risulta convergente.

Risposta:

---

a10) Determinate i valori degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x^\alpha}\,dx$ risulta finito.

Risposta:

b1) i) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$|w|^2 - w + \overline{w} = 4 - 2i\,.$$

ii) Scrivete le soluzioni in forma trigonometrica e in forma esponenziale, e rappresentatele nel piano di Gauss.
iii) Verificate che sono soluzioni dell'equazione $z^3 = 8i$. Sono le sole soluzioni di quest'equazione?

---

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione

$$f(x) = \arctan(x(1 - |x|))\,.$$

Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.
ii) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
iii) Verificate se la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo $[-1, 1]$.
iv) Calcolate $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

---

b3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, e sia $f : [-\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \log(1+x)}{x^2} & \text{se } x \in [-\frac{1}{2}, 1] \setminus \{0\} \\ \alpha & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

i) Determinate α tale che $f(x)$ risulti continua su $[-\frac{1}{2}, 1]$.
ii) Per tale valore di α
a) verificate, usando la definizione, che f è derivabile in $x = 0$;
b) stabilite se $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ è un numero reale.

---

b4) i) Discutete la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2 + 4x + 3}dx\,.$$

ii) Usando la definizione calcolate il suo valore.

---

b5) i) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = 6e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

ii) Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y = 6e^{\alpha x}\,.$$

---

b6) i) Si scrive che $f(x) = 1 + o(x^3)$ per $x \to 0$ se ...

ii) Scrivete la formula e la dimostrazione del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica.

COGNOME ______________________

NOME ______________________

MATRICOLA

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN ING. INFORMATICA, DELLE COMUNICAZIONI ED ELETTRONICA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2019-2020 — TRENTO, 30 GENNAIO 2020

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Non usate il colore rosso.

---

a1) Siano $A = [-2, 3[$ e $B =]-\infty, 1[$. Determinate $\sup(B \setminus A)$.

Risposta:

---

a2) Rappresentate graficamente nel piano complesso l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} > 1\}$.

Risposta:

---

a3) Sia $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x \in [-1, 1[\\ -x + \frac{3}{2} & \text{se } x \in [1, 3]. \end{cases}$ Determinate l'immagine di f.

Risposta:

---

a4) Determinate tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il limite $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ risulta finito.

Risposta:

a5) Determinate le equazioni degli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{2}{4+x} - 1\,.$

Risposta:

a6) Sia $f(x) = e^x + 2\arctan x\,.$ Determinate l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto $(1,0)\,.$

Risposta:

a7) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \int_0^x e^t\,dt}{x^2}\,.$

Risposta:

a8) Determinate $\displaystyle\int \big(2x - \frac{\log x}{x}\big)\,dx\,.$

Risposta:

a9) Determinate gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$ risulta convergente.

Risposta:

a10) Determinate i valori degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x^\alpha}dx$ risulta finito.

Risposta:

b1) i) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$|w|^2 + iw + i\overline{w} = 4 - 2i\,.$$

ii) Scrivete le soluzioni in forma trigonometrica e in forma esponenziale, e rappresentatele nel piano di Gauss.
iii) Verificate che sono soluzioni dell'equazione $z^3 = 8$. Sono le sole soluzioni di quest'equazione?

---

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione

$$f(x) = \arctan(x(|x| - 1))\,.$$

Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.
ii) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
iii) Verificate se la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo $[-1, 1]$.
iv) Calcolate $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

---

b3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, e sia $f : [-\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - \log(1+x)}{x^2} & \text{se } x \in [-\frac{1}{2}, 1] \setminus \{0\} \\ \alpha & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

i) Determinate α tale che $f(x)$ risulti continua su $[-\frac{1}{2}, 1]$.
ii) Per tale valore di α
a) verificate, usando la definizione, che f è derivabile in $x = 0$;
b) stabilite se $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ è un numero reale.

---

b4) i) Discutete la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{3}{x^2 + 5x + 4}dx\,.$$

ii) Usando la definizione calcolate il suo valore.

---

b5) i) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y = 8e^{-2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

ii) Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y = 8e^{\alpha x}\,.$$

---

b6) i) Si scrive che $f(x) = 1 + o(x^2)$ per $x \to 0$ se ...

ii) Scrivete la formula e la dimostrazione del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica.
