COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI	A
NOME ______________	1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN ING. INFORMATICA, DELLE COMUNICAZIONI ED ELETTRONICA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2019-2020 — TRENTO, 10 SETTEMBRE 2020

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Non usate il colore rosso.

a1) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$.

Risposta:

a2) Individuate la monotonia delle successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ e $b_n = \sin a_n$.

Risposta:

a3) Sia $z = -2 + i$. Rappresentate nel piano di Gauss il numero complesso $\overline{z} + 3i$.

Risposta:

a4) Stabilite, motivando la risposta, se la seguente funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 - \sin(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$ è continua in $x = 1$.

Risposta:

a5) Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale, per $x \to 0^+$, della funzione $f(x) = \sin x + \cos \sqrt{2x} - 1$.

Risposta:

---

a6) Siano date le funzioni $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$ Determinate la funzione composta $f \circ g$.

Risposta:

---

a7) Calcolate $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + e^n}{n - e^{2n}}$.

Risposta:

---

a8) Calcolate $F'(0)$, dove $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{4 + t^2}\, dt$.

Risposta:

---

a9) Determinate $\displaystyle\int \frac{4}{x^2 + 1} dx$.

Risposta:

---

a10) Discutete la convergenza del seguente integrale improprio $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[4]{x - 2}} dx$.

Risposta:

---

b1) Sia $f : [-1, e] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 2\log x + 1 & \text{se } x \in]1, e] \, . \end{cases}$$

i) Verificate che f è continua su $[-1, e]$ e derivabile su $]-1, e[$.
ii) Rappresentate graficamente f .
iii) Per il teorema di Lagrange esiste $c \in]0, e[$ tale che $f'(c)$ è la pendenza della retta passante per i punti $(0, f(0))$ e $(e, f(e))$. Determinate tutti i punti $c \in]0, e[$ con questa proprietà.

---

b2) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità/non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2} \, .$$

Tracciate un grafico qualitativo della funzione f .
ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ e $x = 1$.

---

b3) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt[3]{n}} \right)^n .$$

---

b4) Determinate l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{3n \log n} \, .$$

---

b5) i) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2(e^x + 2x) \\ y(0) = -1 \, . \end{cases}$$

ii) Determinate l'equazione degli asintoti che presenta la soluzione.

---

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *strettamente crescente su* $\mathbb{R}$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Torricelli-Barrow.
