

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

A

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE
CDL IN INFORMATICA - CDL IN ING. INFORMATICA, DELLE COMUNICAZIONI ED ELETTRONICA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2019-2020 — TRENTO, 9 NOVEMBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.

È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A =] -2, -1] \cup \{3\}$. Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $A \times \mathbb{R}$.

Risposta:

a2) Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 \leq 1, y \leq |x|\}$.

Risposta:

a3) Sia $\bar{z} = \frac{1}{1-2i}$. Scrivete la forma algebrica di z .

Risposta:

a4) Rappresentate nel piano di Gauss l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2, \operatorname{Re} z \geq 1\}$.

Risposta:

a5) Sia $A = \{x_n = 3 - \frac{2}{n} ; n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a6) Determinate il dominio naturale della seguente funzione $f(x) = \arcsin(x^2 - 3)$.

Risposta:

a7) Sia $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Determinate l'immagine di f .

Risposta:

a8) Dite se la funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (\log x)^3$ è iniettiva (motivate la risposta; 'si' o 'no' non sono una risposta motivata!).

Risposta:

a9) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x < 0 \\ -3 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Determinate la funzione composta $(f \circ f)(x)$.

Risposta:

a10) Calcolate $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sin x}}{3x}$.

Risposta:

- b1) i) Sia $w = 1 - \sqrt{3}i$. Determinate le radici cubiche in \mathbb{C} di w , e rappresentatele nel piano di Gauss.
ii) Data w in i), rappresentate graficamente nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq |z - 2|\}.$$

- iii) Risolvete in \mathbb{C} l'equazione $2z^2 - |z|^2 = \bar{z}$.

- b2) Usando il principio di induzione verificate che

$$\sum_{k=0}^n k2^{k-1} = 2^n(n-1) + 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

- b3) Sia $f : [-10, e] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+2} & \text{se } -10 \leq x \leq -1 \\ -\frac{2}{\pi} \arcsin x & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } 1 < x \leq e. \end{cases}$$

- i) Determinate $a \in \mathbb{R}$ tale che f risulti continua su $[-10, e]$.
ii) Per tale valore di a , usando la rappresentazione grafica di f ,
a) determinate $\inf_{[-10,e]} f$ e $\sup_{[-10,e]} f$. Essi sono minimo e massimo, rispettivamente?
b) determinate i punti di minimo locale e i punti di massimo locale di f .
c) rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto f(x-2)$ e $x \mapsto -2f(x-2)$.
iii) Dite (motivando le risposte) quale delle seguenti scritture è corretta:
 $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow 0$; $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

- b4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x+1)^3 - 2$.

- i) Determinate l'espressione della funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e rappresentatela graficamente.
ii) Quanto vale $f^{-1}(-2)$?

- b5) Determinate al variare di $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2}{[\log(1+x)]^k}.$$

- b6) i) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. L'insieme A si dice *limitato superiormente* se ...

- ii) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete in matematiche il significato della scrittura $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$.

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

B

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE
CDL IN INFORMATICA - CDL IN ING. INFORMATICA, DELLE COMUNICAZIONI ED ELETTRONICA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2019-2020 — TRENTO, 9 NOVEMBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.

È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Non usate il colore rosso.

a1) Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $\mathbb{R} \times A$, dove $A =] -2, -1] \cup \{3\}$.

Risposta:

a2) Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 \geq 1, y \leq |x|\}$.

Risposta:

a3) Sia $\bar{z} = \frac{1}{1+2i}$. Scrivete la forma algebrica di z .

Risposta:

a4) Rappresentate nel piano di Gauss l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \operatorname{Re} z \geq 1\}$.

Risposta:

a5) Sia $A = \{x_n = 3 + \frac{2}{n} ; n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a6) Determinate il dominio naturale della seguente funzione $f(x) = \arccos(x^2 - 3)$.

Risposta:

a7) Sia $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Determinate l'immagine di f .

Risposta:

a8) Dite se la funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \log x$ è iniettiva (motivate la risposta; 'si' o 'no' non sono una risposta motivata!).

Risposta:

a9) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 0 \\ -2^x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Determinate la funzione composta $(f \circ f)(x)$.

Risposta:

a10) Calcolate $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + \cos x}}{4x}$.

Risposta:

- b1) i) Sia $w = 1 + \sqrt{3}i$. Determinate le radici cubiche in \mathbb{C} di w , e rappresentatele nel piano di Gauss.
ii) Data w in i), rappresentate graficamente nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq |z - 2|\}.$$

- iii) Risolvete in \mathbb{C} l'equazione $2z^2 - |z|^2 = -\bar{z}$.

- b2) Usando il principio di induzione verificate che

$$\sum_{k=0}^n \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

- b3) Sia $f : [-10, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x+2} & \text{se } -10 \leq x \leq -1 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin x & \text{se } -1 < x < 1 \\ a + \log_{\frac{1}{2}} x & \text{se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- i) Determinate $a \in \mathbb{R}$ tale che f risulti continua su $[-10, 2]$.
ii) Per tale valore di a , usando la rappresentazione grafica di f ,
a) determinate $\inf_{[-10, 2]} f$ e $\sup_{[-10, 2]} f$. Essi sono minimo e massimo, rispettivamente?
b) determinate i punti di minimo locale e i punti di massimo locale di f .
c) rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto f(x-2)$ e $x \mapsto -2f(x-2)$.
iii) Dite (motivando le risposte) quale delle seguenti scritture è corretta:

$$f(x) = o(1) \text{ per } x \rightarrow 0; \quad f(x) = o(x) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

- b4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x-2)^3 + 1$.

- i) Determinate l'espressione della funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e rappresentatela graficamente.
ii) Quanto vale $f^{-1}(1)$?

- b5) Determinate al variare di $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\log(1+x)]^k}{\sin x^3}.$$

- b6) i) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Essa si dice *limitata superiormente in A* se ...

- ii) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete in matematiche il significato della scrittura $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

C

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE
CDL IN INFORMATICA - CDL IN ING. INFORMATICA, DELLE COMUNICAZIONI ED ELETTRONICA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2019-2020 — TRENTO, 9 NOVEMBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.

È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A =]1, 2] \cup \{-3\}$. Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $A \times \mathbb{R}$.

Risposta:

a2) Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 \leq 1, y \geq |x|\}$.

Risposta:

a3) Sia $\bar{z} = \frac{1}{2-i}$. Scrivete la forma algebrica di z .

Risposta:

a4) Rappresentate nel piano di Gauss l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2, \operatorname{Im} z \geq 1\}$.

Risposta:

a5) Sia $A = \{x_n = 2 - \frac{3}{n} ; n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a6) Determinate il dominio naturale della seguente funzione $f(x) = \arcsin(x^2 - 2)$.

Risposta:

a7) Sia $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Determinate l'immagine di f .

Risposta:

a8) Dite se la funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(x^3)$ è iniettiva (motivate la risposta; 'si' o 'no' non sono una risposta motivata!).

Risposta:

a9) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Determinate la funzione composta $(f \circ f)(x)$.

Risposta:

a10) Calcolate $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \arctan x}}{2x}$.

Risposta:

- b1) i) Sia $w = -1 + \sqrt{3}i$. Determinate le radici cubiche in \mathbb{C} di w , e rappresentatele nel piano di Gauss.
ii) Data w in i), rappresentate graficamente nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq |z - 2|\}.$$

- iii) Risolvete in \mathbb{C} l'equazione $2z^2 + |z|^2 = -\bar{z}$.

- b2) Usando il principio di induzione verificate che

$$\frac{4}{3} \sum_{k=0}^n k3^k = 3^n(2n-1) + 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

- b3) Sia $f : [-3, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 + a & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ -\frac{2}{\pi} \arcsin x & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ -1 + \log_2 x & \text{se } 1 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

- i) Determinate $a \in \mathbb{R}$ tale che f risulti continua su $[-3, 8]$.
ii) Per tale valore di a , usando la rappresentazione grafica di f ,
a) determinate $\inf_{[-3,8]} f$ e $\sup_{[-3,8]} f$. Essi sono minimo e massimo, rispettivamente?
b) determinate i punti di minimo locale e i punti di massimo locale di f .
c) rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto f(x-2)$ e $x \mapsto -2f(x-2)$.
iii) Dite (motivando le risposte) quale delle seguenti scritture è corretta:
 $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow 0$; $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

- b4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x+2)^3 - 1$.

- i) Determinate l'espressione della funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e rappresentatela graficamente.
ii) Quanto vale $f^{-1}(-1)$?

- b5) Determinate al variare di $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^k}{(1 - \cos x)^2}.$$

- b6) i) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. L'insieme A si dice *limitato inferiormente* se ...

- ii) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete in matematiche il significato della scrittura $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

D

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE
CDL IN INFORMATICA - CDL IN ING. INFORMATICA, DELLE COMUNICAZIONI ED ELETTRONICA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2019-2020 — TRENTO, 9 NOVEMBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.

È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Non usate il colore rosso.

a1) Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $\mathbb{R} \times A$, dove $A =]1, 2] \cup \{-3\}$.

Risposta:

a2) Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 \geq 1, y \geq |x|\}$.

Risposta:

a3) Sia $\bar{z} = \frac{1}{2+i}$. Scrivete la forma algebrica di z .

Risposta:

a4) Rappresentate nel piano di Gauss l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \operatorname{Im} z \geq 1\}$.

Risposta:

a5) Sia $A = \{x_n = 2 + \frac{3}{n} ; n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a6) Determinate il dominio naturale della seguente funzione $f(x) = \arccos(x^2 - 2)$.

Risposta:

a7) Sia $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Determinate l'immagine di f .

Risposta:

a8) Dite se la funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + \log x$ è iniettiva (motivate la risposta; 'si' o 'no' non sono una risposta motivata!).

Risposta:

a9) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Determinate la funzione composta $(f \circ f)(x)$.

Risposta:

a10) Calcolate $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + \arctan x}}{x}$.

Risposta:

- b1) i) Sia $w = -1 - \sqrt{3}i$. Determinate le radici cubiche in \mathbb{C} di w , e rappresentatele nel piano di Gauss.
ii) Data w in i), rappresentate graficamente nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq |z - 2|\}.$$

- iii) Risolvete in \mathbb{C} l'equazione $z^2 - 2|z|^2 = \bar{z}$.

- b2) Usando il principio di induzione verificate che

$$\sum_{k=0}^n \frac{9k}{4^k} = 4 - \frac{3n+4}{4^n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

- b3) Sia $f : [-4, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^3 & \text{se } -4 \leq x < -1 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin x & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ -\sqrt{x-1} + a & \text{se } 1 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

- i) Determinate $a \in \mathbb{R}$ tale che f risulti continua su $[-4, 10]$.
ii) Per tale valore di a , usando la rappresentazione grafica di f ,
a) determinate $\inf_{[-4, 10]} f$ e $\sup_{[-4, 10]} f$. Essi sono minimo e massimo, rispettivamente?
b) determinate i punti di minimo locale e i punti di massimo locale di f .
c) rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto f(x-2)$ e $x \mapsto -2f(x-2)$.
iii) Dite (motivando le risposte) quale delle seguenti scritture è corretta:

$$f(x) = o(1) \text{ per } x \rightarrow 0; \quad f(x) = o(x) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

- b4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x-1)^3 + 2$.

- i) Determinate l'espressione della funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e rappresentatela graficamente.
ii) Quanto vale $f^{-1}(2)$?

- b5) Determinate al variare di $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin x^k}.$$

- b6) i) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Essa si dice *limitata inferiormente in A* se ...

- ii) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete in matematiche il significato della scrittura $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.