COGNOME ______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________________	1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN ING. INFORMATICA, DELLE COMUNICAZIONI ED ELETTRONICA

SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2019-2020 — TRENTO, 21 DICEMBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Non usate il colore rosso.

---

a1) Calcolate la derivata prima della funzione $f(x) = (\arctan(5x^2+1))^2$.

Risposta:

---

a2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 2x + e^x$. Calcolate $(f^{-1})'(1)$.

Risposta:

---

a3) Dite per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin 2x}{x} & \text{se } -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ e^x + \alpha & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass (motivate la risposta).

Risposta:

---

a4) Determinate i punti critici della funzione $f(x) = x^3 - x$ definita su $\mathbb{R}$.

Risposta:

---

a5) Calcolate $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3}$.

Risposta:

a6) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato in $x_0 = 1$, della funzione $f(x) = e^x$.

Risposta:

a7) Determinate il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n}$.

Risposta:

a8) Determinate l'integrale $\int x \sin(x^2)\, dx$.

Risposta:

a9) Determinate gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{x^{\alpha+1}}\, dx$ risulti convergente.

Risposta:

a10) Trovate l'insieme delle soluzioni dell'equazione $y'(x) = -\frac{1}{2} y(x)$.

Risposta:

b1) i) Determinate i valori di α e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \sin(\alpha x^2 - x) & \text{se } x < 0 \\ \alpha \log(1+x) + \beta e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile in $x_0 = 0$.
ii) Per tali valori di α e β
a) determinate $f'(0)$;
b) scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$;
c) calcolate $\displaystyle\int_0^1 \left(f(x) + e^{2x}\right) dx$.

---

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione

$$f(x) = (x + |x+1|)e^{-x^2}.$$

Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.
ii) Determinate, usando la definizione, l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} x f(x) dx$.

---

b3) Determinate i limiti

i) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 + \sin x^2 - \log^2(1 + \sqrt{2}x)}{x^3};$$

ii) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x \left(e^{t^2} - 1 + \sin t^2 - \log^2(1 + \sqrt{2}t)\right) dt}{x^4}.$$

---

b4) i) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \frac{1}{n}.$$

ii) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n^\alpha}.$$

---

b5) Verificate che l'equazione $4^x = -x^2 + 2$ ammette una ed una sola soluzione nell'intervallo $[0,1]$. Determinate un intervallo $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [0,1]$ che contiene tale soluzione e che sia di ampiezza $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \dfrac{1}{4}$.

---

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *derivabile in* $x_0 \in \mathbb{R}$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del criterio del confronto asintotico per serie a termini positivi.

COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA ⌊_⌋_⌋_⌋_⌋_⌋_⌋	B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN ING. INFORMATICA, DELLE COMUNICAZIONI ED ELETTRONICA

SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2019-2020 — TRENTO, 21 DICEMBRE 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Non usate il colore rosso.

a1) Calcolate la derivata prima della funzione $f(x) = (\log(3x^2+1))^2$.

Risposta:

a2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 3x + e^x$. Calcolate $(f^{-1})'(1)$.

Risposta:

a3) Dite per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin 3x}{x} & \text{se } -1 \le x < 0 \\ e^x + \alpha & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2} \end{cases}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass (motivate la risposta).

Risposta:

a4) Determinate i punti critici della funzione $f(x) = -x^3 + x$ definita su $\mathbb{R}$.

Risposta:

a5) Calcolate $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{2x^3}$.

Risposta:

a6) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato in $x_0 = 2$, della funzione $f(x) = e^x$.

Risposta:

a7) Determinate il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2+1}$.

Risposta:

a8) Determinate l'integrale $\int x \cos(x^2)\, dx$.

Risposta:

a9) Determinate gli $\alpha \geq 0$ tali che risulti convergente l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{\arctan \sqrt[3]{x}}{x^{\alpha+1}}\, dx$.

Risposta:

a10) Trovate l'insieme delle soluzioni dell'equazione $y'(x) = -\frac{1}{3} y(x)$.

Risposta:

b1) i) Determinate i valori di α e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \arctan(x^2 - \alpha x) & \text{se } x \leq 0 \\ \alpha e^{3x} - \beta \log(1 + x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile in $x_0 = 0$

ii) Per tali valori di α e β

a) determinate $f'(0)$;

b) scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$;

c) calcolate $\displaystyle\int_0^1 \big(e^{3x} - f(x)\big)dx$.

---

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione

$$f(x) = (-x + |x - 1|)e^{-x^2} .$$

Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

ii) Determinate, usando la definizione, l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f(x) dx$.

---

b3) Determinate i limiti

i) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos\sqrt{2}x - 2\log^2(1 + x)}{x^3} ;$$

ii) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x \big(e^{t^2} - \cos\sqrt{2}t - 2\log^2(1 + t)\big)dt}{x^4} .$$

---

b4) i) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n^{\alpha+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\frac{1}{n} .$$

ii) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x - 1)^n}{n^{2\alpha}} .$$

---

b5) Verificate che l'equazione $(\frac{1}{4})^x = x^3 + 2$ ammette una ed una sola soluzione nell'intervallo $[-1, 0]$. Determinate un intervallo $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [-1, 0]$ che contiene tale soluzione e che sia di ampiezza $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$.

---

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *continua in* $x_0 \in \mathbb{R}$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del criterio della radice n-esima per serie a termini positivi.
