Campi di Weierstrass e minimi locali - Nota dello studente Francesco Pedrotti

14 maggio 2019

Nel seguito indichiamo con $\|\cdot\|$ a seconda del contesto:

- la norma infinito per una funzione $u \in C^0([a,b])$;
- la norma che restituisce il massimo tra i valori assoluti delle componenti nel caso di un $n-upla$ di numeri reali.

Corollario 1. *Sia* $X = \{u \in C^1([a,b]) \mid u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$*,* $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *e* $F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))dx$*. Siano inoltre* h *un campo di estremali per* f *su* G *e* $u_0 \in X$ *estremale immerso nel campo tale che* $\exists \delta_1 > 0 : \forall v \in X\,, \|v - u_0\|_{C^0} < \delta_1 \implies graf(v) \subset G$*.*

1. *Se* $f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$*, allora* u_0 *è un punto di minimo relativo debole per* F *su* X*.*
2. *Se* $\exists \delta > 0$ *tale che* $\forall v \in X[\|v - u_0\| < \delta \implies (\forall \xi \in \mathbb{R} \quad f_{\xi\xi}(x, v(x), \xi) > 0)]$ *allora* u_0 *è un punto di minimo relativo forte per* F *su* X*.*

Dimostrazione. 1. Siano $M_1 = \|u_0\|$ e $M_2 = \|u_0'\|$. Allora l'insieme $K = [a,b] \times [-M_1 - 1, M_1 + 1] \times [-M_2 - 1, M_2 + 1]$ è compatto e pertanto $f_{\xi\xi}$ è uniformemente continua su K. In particolare, posto

$$m \coloneqq \min_{x \in [a,b]} f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)), \tag{1}$$

si ha che $\exists \delta_2 > 0$ (non è restrittivo supporre $\delta_2 < \min(1, \delta_1)$) tale che $\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in K$

$$\|x - y\| < \delta_2 \implies |f_{\xi\xi}(x_1, x_2, x_3) - f_{\xi\xi}(y_1, y_2, y_3)| < \frac{m}{2}.$$

Segue allora che se $v \in X$ e $\|v - u_0\|_{C^1} < \delta_2$

$$f_{\xi\xi}(x, v(x), v'(x)) > \frac{m}{2} > 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

Dalla uniforme continuità della funzione P su K abbiamo inoltre anche che $\exists\, 0 < \delta < \delta_2$ tale che se $v \in X$ e $\|v - u_0\|_{C^1} < \delta$

$$|P(x, v(x)) - P(x, u_0(x))| = \left|P(x, v(x)) - u_0'(x)\right| < \delta_2 \quad \forall x \in [a, b].$$

Se $v \in X$ e $\|v - u_0\|_{C^1} < \delta$ dalla formula di Taylor con resto di Lagrange e da quanto discusso precedentemente segue $\forall x \in [a, b]$ $\exists \theta(x) \in (0, 1)$ tale che

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(x, v(x), P(x, v(x)), v'(x)) = \\ =&\frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x, v(x), P(x, v(x)) + \theta(x)(v'(x) - P(x, v(x))) \cdot (v'(x) - P(x, v(x)))^2 > 0,\end{aligned}$$

da cui la tesi per un teorema precedente.

2. Senza perdita di generalità $\delta < \delta_1$. Allora se $v \in X$ e $\|v - u_0\| < \delta$ dalla formula di Taylor con resto di Lagrange e per le nostre ipotesi si ha che $\forall x \in [a, b]$ $\exists \theta(x) \in (0, 1)$ tale che

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(x, v(x), P(x, v(x)), v'(x)) = \\ =&\frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x, v(x), P(x, v(x)) + \theta(x)(v'(x) - P(x, v(x))) \cdot (v'(x) - P(x, v(x)))^2 > 0,\end{aligned}$$

da cui la tesi per un teorema precedente.

$\square$

Osservazione 2. *Con le notazioni del teorema precedente se h è un campo di estremali per f su G, $u_0 \in X$ è estremale immerso nel campo tale che $\exists \delta_1 > 0 : \forall v \in X \|v - u_0\|_{C^0} < \delta_1 \implies graf(v) \subset G$ e $\exists c > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R}$ si ha $f_{\xi\xi}(x, u_0(x), \xi) \geq c$, allora non necessariamente u_0 è un minimo relativo forte. In questo caso non riusciamo infatti a ripetere il ragionamento del punto 1 della dimostrazione precedente, perché l'insieme $K = [a, b] \times [-M_1 - 1, M_1 + 1] \times \mathbb{R}$ non è compatto (e quindi non ho l'uniforme continuità di $f_{\xi\xi}$ su K e quindi non riesco a garantire con la vicinanza in norma C_0 di v a u_0 di restare vicino a $f_{\xi\xi}(x, u_0(x), \xi)$ con $f_{\xi\xi}(x, v(x), \xi)$ per ogni valore $\xi \in \mathbb{R}$). Si veda l'esempio sottostante.*

Esempio:
Si consideri l'insieme delle funzioni ammissibili

$$X = \{u \in C^1([0, 1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

e la lagrangiana

$$f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = \xi^2 + u\xi^5 \in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}),$$

per la quale si ha

$$f_u(x, u, \xi) = \xi^5,$$

$$
\begin{aligned}
f_\xi(x,u,\xi) &= 2\xi + 5u\xi^4, \\
f_{\xi\xi}(x,u,\xi) &= 2 + 20u\xi^3, \\
f_{u\xi}(x,u,\xi) &= 5\xi^4, \\
f_{uu}(x,u,\xi) &= 0.
\end{aligned}
$$

L'equazione di Eulero-Lagrange risulta

$$\frac{d}{dx}\left(2u' + 5uu'^4\right) = u'^5.$$

Consideriamo inoltre $u_0 \in X \cap C^\infty([0,1])$ definito da

$$u_0(x) = 0:$$

per verifica diretta esso è un estremale di

$$F(u) = \int_0^1 f(x,u(x),u'(x))dx = \int_0^1 u'(x)^2 + u(x)u'(x)^5 dx$$

e vale

$$F(u_0) = 0.$$

Osserviamo inoltre che vale

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad f_{\xi\xi}(x,u_0(x),\xi) = 2 > 0.$$

L'equazione accessoria di Jacobi risulta allora essere

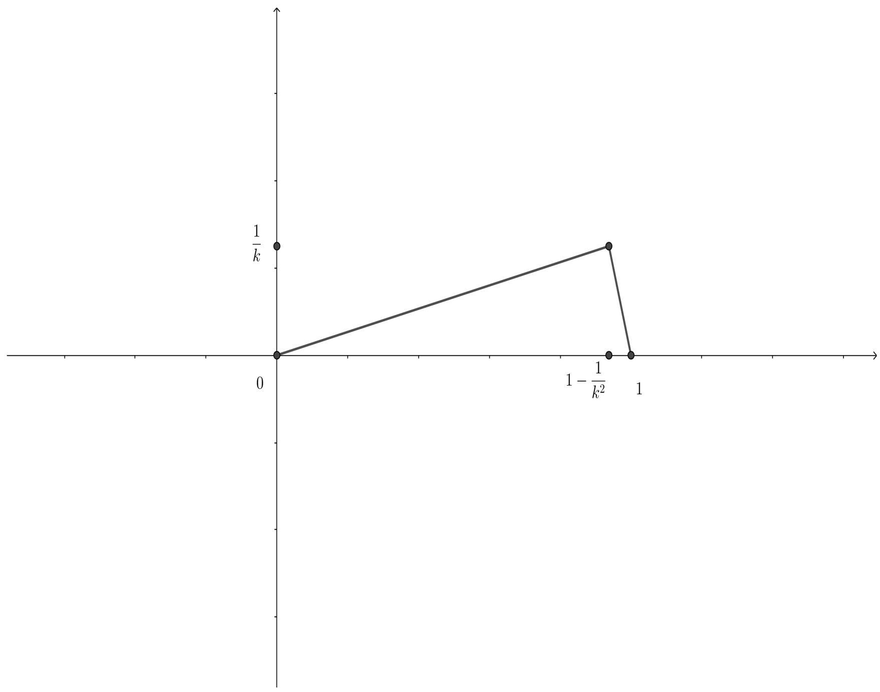
$$-v'' = 0 \quad \text{da cui} \quad v(x) = ax + b,$$

sicché la funzione di Jacobi è $v(x) = x$ che non ha punti coniugati a 0 in $]0,1]$: segue che u_0 può essere immerso in un campo di estremali. Definiamo ora per $k \geq 2$ la funzione v_k nel seguente modo (si tratta di una funzione a tratti che poi andrà "smussata"):

$$v_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k^2-1}x \text{ se } x \in [0, 1-\frac{1}{k^2}] \\ -k(x-1) \text{ se } x \in [1-\frac{1}{k^2}, 1], \end{cases}$$

di modo che

$$v_k'(x) \begin{cases} \in (0,1) \text{ se } x \in [0, 1-\frac{1}{k^2}] \\ = -k \text{ se } x \in [1-\frac{1}{k^2}, 1]. \end{cases}$$



Si ha allora che $\|v_k - u_0\| = \|v_k\| = \frac{1}{k} \to 0$ per $k \to \infty$ e

$$F(v_k) \leq \int_0^{1-\frac{1}{k^2}} 2dx + \int_{1-\frac{1}{k^2}}^1 k^2 + k^6(x-1)dx \leq$$

$$\leq 2 + 1 - \frac{k^6}{2}\frac{1}{k^4} = 3 - \frac{k^2}{2} \to -\infty \text{ per } k \to \infty.$$

Segue che u_0 non è un punto di minimo locale forte.