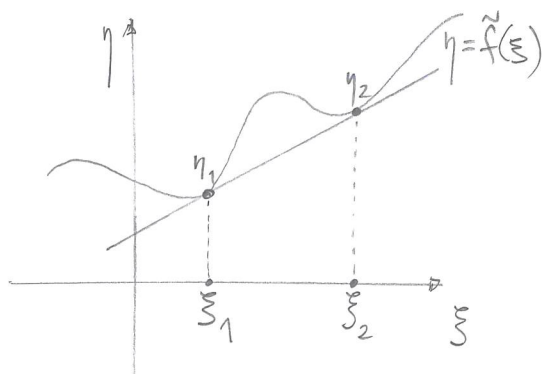


Condizioni di Erdmann-Weierstrass — Commento —

Teorema: Se $u_0 \in \mathcal{C}_{\text{batti}}^1([a,b])$ è un minimizzante per $F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$ in $X_{\text{batti}} = \{u \in \mathcal{C}_{\text{batti}}^1([a,b]) : u(a)=\alpha, u(b)=\beta\}$, allora in ogni punto $\bar{x}$ in cui u_0' ha un salto, sono soddisfatte le condizioni di Erdmann-Weierstrass

- 1) $f_{\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u_{0-}'(\bar{x})) = f_{\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u_{0+}'(\bar{x}))$ (*)
- 2) $f(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u_{0-}'(\bar{x})) - u_{0-}'(\bar{x}) f_{\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u_{0-}'(\bar{x})) =$
 $f(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u_{0+}'(\bar{x})) - u_{0+}'(\bar{x}) f_{\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u_{0+}'(\bar{x})).$ □

Le due condizioni hanno una interpretazione geometrica molto semplice ed espressiva usando la "caratteristica" (o "indicatrice") di f in $(\bar{x}, u_0(\bar{x}))$ definita da $\tilde{f}(\xi) \doteq f(\bar{x}, u_0(\bar{x}), \xi)$



Eq. retta tg al grafico di $\tilde{f}$ in

$$\begin{aligned} (\xi_1, \eta_1) & \quad \eta = \eta_1 + f_{\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), \xi_1)(\xi - \xi_1) \\ (\xi_2, \eta_2) & \quad \eta = \eta_2 + f_{\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), \xi_2)(\xi - \xi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Consideriamo } \xi_1 &= u_{0-}'(\bar{x}) & \eta_1 &= f(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u_{0-}'(\bar{x})) \\ \xi_2 &= u_{0+}'(\bar{x}) & \eta_2 &= f(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u_{0+}'(\bar{x})) \end{aligned}$$

Allora per 1) + 2) si ha che le due rette tangenti sono uguali!

Infatti, sia (ξ, η) soddisf. $\eta = f(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u_{0-}'(\bar{x})) + f_{\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u_{0-}'(\bar{x}))(\xi - u_{0-}'(\bar{x})).$

(*) Ricordo che $u_{0-}'(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} u_0'(x)$ $u_{0+}'(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} u_0'(x)$

Allora

$$\begin{aligned} \eta &= f(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u'_{0+}(\bar{x})) + f_{\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u'_{0+}(\bar{x}))(\xi - u'_{0+}(\bar{x})) \\ &\quad + [f_{\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u'_{0-}(\bar{x})) - f_{\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u'_{0+}(\bar{x}))]\xi \\ &\stackrel{(1)}{=} f(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u'_{0+}(\bar{x})) + f_{\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), u'_{0+}(\bar{x}))(\xi - u'_{0+}(\bar{x})) \end{aligned}$$

provando quanto si voleva. $\square$

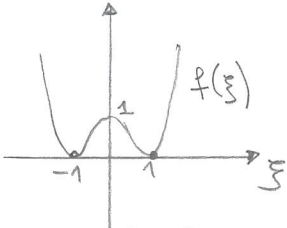
Quindi un pt. angoloso in $(\bar{x}, u_0(\bar{x}))$ è possibile solo se la caratteristica di f relativa a quel punto (ossia $\tilde{f}(\xi) = f(\bar{x}, u_0(\bar{x}), \xi)$) permette una tangente che la tocca in almeno due punti.

Punti angolosi possono essere esclusi immediatamente se la caratteristica è strett. convessa ($f_{\xi\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), \xi) > 0 \quad \forall \xi$) oppure strett. concava ($f_{\xi\xi}(\bar{x}, u_0(\bar{x}), \xi) < 0 \quad \forall \xi$).

Es. (paradosso di Eulero) $F(u) = \int_0^1 (u'^2 - 1)^2 dx$ $X_{\text{batti}} = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$

$$f(x, u, \xi) = f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$$

$\parallel$
 $\tilde{f}(\xi)$



Usando l'interpretazione geometrica descritta sopra si deduce che gli unici possibili pt. angolosi $(\bar{x}, u_0(\bar{x}))$ in questo caso sono quelli per cui

$$u'_{0-}(\bar{x}) = -1 \quad u'_{0+}(\bar{x}) = 1$$

nota:
 $\tilde{f}(\xi) = f(\xi)!$

o viceversa.