Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica
Corso di Calcolo delle Variazioni - a.a. 2018/19 (periodo 18/02/19-08/05/19)
docente: Prof. Anneliese Defranceschi
e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it
homepage: http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

Lezioni: lunedì 9.30-11.30 (Aula A108), mercoledì 8.30-10.30 (Aula A203); con qualche ora di recupero

18/02/19 (2 ore):

Introduzione al corso: orario, indirizzo e-mail, presentazione del programma (in linea di massima).
Ottimizzazione (ricerca del minimo) in generale: minimo (valore minimo), punto di minimo. In particolare, in $\mathbb{R}$, condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di punti di minimo (locali e non) nel caso di funzioni regolari (metodo indiretto); teorema di Weierstrass e variante per una dimostrazione diretta dell'esistenza di un minimo (metodo diretto).
Integrali variazionali (integrando variazionale, funzione di Lagrange o lagrangiana) e problemi di minimo relativi a funzionali integrali. Esempi di modellizzazione di problemi dell'Analisi/Geometria e della Fisica Matematica come problemi di minimo relativi a funzionali integrali: a) curva di minima lunghezza tra due punti fissati nel piano; b) la brachistocrona; c) superficie di rivoluzione di area minima; d) problema (disuguaglianza) isoperimetrico (problema di Didone) (solo accennato).
Nota sulla non-esistenza di minimi: $F(u) = \int_{-1}^{1} x^2(u'(x))^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ (esempio di Weierstrass); $F(u) = \int_0^1 \frac{1}{1+(u'(x))^2}\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$ (non-esistenza del minimo e del massimo; lasciato per esercizio).

20/02/19 (2 ore):

Svolgimento dell'esercizio proposto nella lezione precedente. **Metodi indiretti (classici)**: approccio classico per affrontare il problema di minimo per funzionali/funzionali integrali. Qualche cenno storico.
Ottimizzazione in $\mathbb{R}^n$: variazione prima e seconda. Cond. necessarie/sufficienti per punti di minimo (locale).
Variazione prima e variazione seconda per $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq V$ con V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (linguaggio introdotto da Lagrange e Eulero; il simbolo lagrangiano δ). Punto di minimo u_0 per F e l'annullarsi della variazione prima in u_0 (e variazione seconda non-negativa). Esercizi: calcolo della variazione prima per funzionali integrali.

25/02/19 (2 ore):

Derivazione sotto il segno di integrale. Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni.
L'annullamento della variazione prima e condizioni necessarie per punti di minimo per funzionali integrali: Equazione di Eulero-Lagrange in forma debole (EED). Estremale debole di F. Equazione di Eulero-Lagrange (EE). Estremale di F. Dim. di (EED) e (EE).
Esercizio: Determinare gli estremali di $F(u)$ relativa alla funzione lagrangiana $f(x, u, \xi) = \xi^2 + u^2$.
Non-regolarità $\mathcal{C}^2$ di estremali deb. e minimizzanti: $F(u) = \int_{-1}^{1}(u(x))^2[2x - u'(x)]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$.
Non-esistenza di un minimizzante $\mathcal{C}^1$: $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ (paradosso di Eulero). Il minimo esiste nella classe delle funzioni $\mathcal{C}^1$-a tratti. Provare che $\inf_{u\in X} F(u) = 0$ (lasciato per esercizio).

27/02/19 (2 ore):

Svolgimento dell'esercizio proposto nella lezione precedente. Equazione di Eulero-Lagrange per $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$. Esistenza di un estremale di F in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ che non è minimo.
Convessità e condizione sufficiente di ottimalità per funzionali integrali: La convessità della funzione lagrangiana come condizione sufficiente affinchè un estremale di F sia un punto di minimo. Stretta convessità ed unicità degli eventuali minimi.

(Ripasso sulle funzioni convesse in $\mathbb{R}^n$; caratterizzazione della convessità nel caso di funzioni $\mathcal{C}^1$ e $\mathcal{C}^2$. Disuguaglianza di Jensen). La versione indebolita di stretta convessità e l'unicità.
L'equazione di Eulero-Lagrange $(EE)'$. Se f non dipende esplicitamente da x (caso autonomo), allora $\Phi(u,\xi) := f(u,\xi) - \xi f_\xi(u,\xi)$ è un integrale primo del funzionale F.
Equivalenza tra (EE) e $\Phi(u_0, u_0') =$ costante per soluzioni u_0 che non hanno tratti costanti.

04/03/19 (2 ore):

L'equazione di Eulero-Lagrange (EE) (o (EED)) e gli estremali (e loro natura) di F:

Caso 1): $f(x,u,\xi) = f(\xi)$.
Vari commenti sul caso generale.
1a): Il caso strettamente convesso; il caso convesso. La retta come soluzione del problema di minimo. Unicità/non unicità del minimo. Curva di minima lunghezza (caso non-parametrico). Problema di minimo di $F(u) = \int_0^2 (u'(x))^2\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0) = 5, u(2) = 10\}$.
1b): Il caso non-convessa: discussione sull'esistenza (o non) di un minimo.
Il funzionale $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = \lambda\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Lemma trivial (condizione sufficiente per la minimalità mediante funzionale ausiliario). Una sua applicazione diretta al funzionale del doppio pozzo (via convessificazione).

Caso 2): $f(x,u,\xi) = f(x,\xi)$.
Commento sul caso generale. Ricerca del punto di minimo di $F(u) = \int_1^2 [u'(x)(1 + x^2 u'(x)]\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = 3, u(2) = 5\}$.

06/03/19 (2 ore):

L'esempio di Weierstrass e variante.
Caso 3): $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$.
3.a) f convessa ($F(u) = \int_{-1}^1 [\frac{k}{2}(u'(x))^2 + gu(x)]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 0\}$; interpretazione fisica del funzionale: corda elastica).
Disuguaglianza di Poincarè. Dimostrazione della disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger.
3.b) f non convessa. Studio del problema di minimo di $F_\lambda(u) = \int_0^\pi [(u'(x))^2 - \lambda^2(u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0) = 0, u(\pi) = 0\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'integrale primo di $F(x) = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}|x'(t)|^2 - V(x(t))]\,dt$ e la conservazione dell'energia totale (interpretazione fisica dell'integrale primo per F).

11/03/19 (2 ore):

Caso 4): $f = f(x,u,\xi)$
($F(u) = \int_0^1 [\frac{1}{2}(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$; g continua assegnata; esistenza di un unico estremale in X che risulta essere minimo; caso $g(x) = -x + 1$).
($F(u) = \int_0^{2\pi} [(u'(x))^2 + (u(x) - g(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,2\pi]) : u(0) = 0, u(2\pi) = \beta\}$; g continua assegnata; esistenza di un unico estremale in X che risulta essere minimo; caso $g(x) = \sin 4x$ con $\beta = 0$ oppure $\beta = 1$).
Non-esistenza del minimo per $F(u) = \int_0^1 [u^2 + xu']\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 1, u(1) = 0\}$ (lasciato per esercizio).
Commento sulle soluzioni dell'integrale primo e dell'equazione di Eulero-Lagrange nel caso $f = f(u,\xi)$.
Studio del problema della brachistocrona: non-convessità della funzione lagrangiana. Trucco per superare questa 'mancanza'. L'integrale primo legato al funzionale della brachistocrona $T(u)$. La soluzione (espressa in forma parametrica) è un arco di cicloide.
Metodo risolutivo per equazioni differenziali del tipo $F(y,y') = 0$ (giustificazione delle scelte fatte nella risoluzione dell'integrale primo legato al funzionale della brachistocrona: vedi [materiale didattico]; non svolto a lezione).

13/03/19 (2 ore):

L'arco di cicloide come unico punto di minimo per il funzionale della brachistocrona $T(u)$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = 0, u(b) = \beta, u > 0 \text{ su }]0,b]\}$. Tempo minimo di percorrenza.

Confronto con il tempo di percorrenza lungo una retta. Ancora qualche osservazione sulla brachistocrona: confronto con il tempo di percorrenza lungo una semicirconferenza. Tautocronia della cicloide (solo accennato) [vedi materiale visivo e animato on line].
Studio del problema delle superfici di rivoluzione di area minima. Funzioni iperboliche; l'integrale primo legato al funzionale $S(u)$; catenaria, catenoide. Esistenza o non di estremali soddisfacenti le condizioni al contorno. Osservazioni varie sulla loro natura [vedi materiale visivo e animato on line].
Discussione del problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + (u(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$ (visto fino ad ora; eq. di Eulero-Lagrange con dati al bordo di Dirichlet).

18/03/19 (2 ore):

Commento sul problema della superficie di rivoluzione di area minima passante per $A = (0,1)$ e $B = (1,1)$ (confronto tra $S(u)$ con u catenaria passante per A e B e $S(u)$ con $u \equiv 1$).
Discussione del problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + (u(x))^2]\, dx$ su
- $\widetilde{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha\}$ (eq. di Eulero-Lagrange con dati al bordo di Dirichlet e di Neumann);
- $\widehat{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b])\}$ (eq. di Eulero-Lagrange con dati al bordo di Neumann);
- $X^* = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = u(b)\}$ (eq. di Eulero-Lagrange con condizioni al bordo periodiche per u e u').

Esercizio: problema di minimo per $F(u) = \int_0^2 [(u'(x))^2 + (u(x))^2]\, dx$ e $F(u) = \int_0^2 [(u'(x))^2 + u(x)]\, dx$ su vari $X, \widetilde{X}, \widehat{X}$ e X^* .
Problemi variazionali con vincolo isoperimetrico: Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (non dim.). Il caso convesso.
Applicazione: studio del problema di minimo per $F(u) = \int_0^1 (u'(x))^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ con il vincolo isoperimetrico $G(u) = \int_0^1 u(x)\, dx = 1$.

20/03/19 (2 ore):

Dim. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.
Il problema della catenaria (il problema del filo pesante). La catenaria nell'architettura [vedi materiale on line].
Il problema di Didone usando i moltiplicatori di Lagrange (accennato).

25/03/19 (3 ore):

Il problema di Didone usando i moltiplicatori di Lagrange.
Il problema di Didone usando il teorema di Green nel piano e la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger. Il caso generale.
La disuguaglianza isoperimetrica nel piano (usando la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger generale - dim. solo accennata - e il teorema di Green).
Il lemma di du Bois-Reymond. Un corollario del lemma di du Bois-Reymond. L'equazione di Eulero-Lagrange per f e u di classe $\mathcal{C}^1$. L'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale.

27/04/19 (2 ore):

Estremali spezzati: l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale e le condizioni di Erdmann-Weierstrass (senza dim.).
Es. 1.: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\, dx$ su $Y = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ e su $Y^\beta = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = \beta\}$.
Es. 2.: $F(u) = \int_{-1}^1 (u(x))^2 (1 - u'(x))^2\, dx$ su $Y = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$ e su $Y^{\alpha,\beta} = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1,1]) : u(-1) = \alpha, u(1) = \beta\}$.
Minimi locali (relativi) deboli e forti (stretti). Ovviamente ogni punto di minimo locale (relativo) forte è un punto di minimo locale (relativo) debole. Non vale il viceversa: la funzione identicamente nulla su $[0,1]$ è un punto di minimo relativo debole, ma non forte, per $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u'(x))^4]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
Analogamente per il funzionale di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.

01/04/19 (3 ore):

Proposizione (base): i) Condizioni necessarie per punti di minimo relativo debole per F su X.
ii) Condizione sufficiente (coercitività della variazione seconda) affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole per F su X.
La sola positività della variazione seconda non è sufficiente affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole: esempio di Scheeffer ($F(u) = \int_{-1}^{1}[x^2(u'(x))^2 + x(u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$) ($u_0 \equiv 0$ non è un punto di minimo locale debole per F su X, anche se $\delta^2 F(u_0, v) > 0$ per ogni $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ con $v(0) = v(1) = 0$, $v \not\equiv 0$).
La coercività della variazione seconda non è sufficiente affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo forte: esempio di Scheeffer ($F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$).
Condizione necessaria di Legendre per minimi relativi deboli. Applicazione agli estremali del funzionale $F(u) = \int_0^1[3(u'(x))^4 - 20(u'(x))^3 + 36(u'(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$.
Funzione di eccesso di Weierstrass. Condizione necessaria di Weierstrass per minimi relativi forti (senza dim.). Applicazione al funzionale di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Qualche commento sull'interpretazione grafica della condizione necessaria di Weierstrass. Dalla condizione necessaria di Weierstrass alla condizione necessaria di Legendre.
Lagrangiana accessoria e integrale accessorio associato ad una lagrangiana f e un estremale u_0.

08/04/19 (3 ore):

La teoria di Jacobi per minimi relativi deboli. Equazione (accessoria) di Jacobi. Campi di Jacobi. Null-lagrangian. Lemma di Legendre. Lemma di Jacobi. Teorema: Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e campi di Jacobi (dim).
Funzione di Jacobi. Punti coniugati. Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e punti coniugati (dim.).
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^b[(u'(x))^2 - (u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = u(b) = 0\}$, al variare di $b > 0$.

10/04/19 (2 ore):

Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^\pi[(u'(x))^2 - u^2(x) - u^4(x)]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0) = u(\pi) = 0\}$.
Studio della natura dell'estremale $u_0(x) = x$ di $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0,\ u(1) = 1\}$.
La teoria dei campi di Weierstrass per minimi relativi forti. Campo di estremali (rispetto alla lagrangiana f) e funzione pendenza.
Campo di estremali e funzione pendenza: casi $f(x,u,\xi) = f(\xi)$ e $f(x,u,\xi) = \xi^2 - u^2$.
Equazione di Eulero (modificata) per il campo (enunciato). Equazioni di Carathéodory.

15/04/19 (3 ore):

Equazione di Eulero (modificata) per il campo (dim.). Integrale invariante di Hilbert (rispetto ad f).
Condizioni sufficienti affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo relativo forte (mediante la condizione forte di Weierstrass). Campo di Weierstrass. Condizioni sufficienti affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo relativo debole (risp. forte) (mediante la condizione di Legendre stretta (risp. forte)) (traccia di dim.)
Condizioni sufficienti affinchè un estremale sia un punto di minimo relativo forte mediante i punti coniugati e la teoria dei campi di estremali (senza dim.).
Studio della natura dell'estremale $u_0(x) \equiv 1$ di $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$. Dimostrazione che $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\,dx$ non ammette minimo assoluto su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$.
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - (u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.

Studio della natura dell'estremale $u_0(x) = kx$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = k\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ (caso $|k| \geq 1$) .

17/04/19 (2 ore):

Studio della natura dell'estremale $u_0(x) = kx$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = k\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ (studio completato).
Studio del problema di minimo per $F(u) = \int_1^3 [\frac{1}{2}(u'(x))^2 + u'(x)u(x) + u'(x) + u(x))\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,3]) : u(1) = 0, u(3) = 4\}$ (ricerca degli estremali di f; studio di due campi di estremali (rispettivi a f) e la funzione pendenza rispettiva; l'integrale invariante di Hilbert e verifica attraverso due esempi della sua invarianza; verifica usando la teoria dei campi di Weierstrass che $u(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ è punto di minimo assoluto (unico) per F su X; riscrittura dell'integrale come $F(u) = \int_1^3 [\frac{1}{2}(u'(x))^2 + u(x)]\, dx + 12)$.
Metodo diretto. Introduzione. Teorema di Weierstrass sui compatti di $\mathbb{R}^n$. Successione minimizzante.

29/04/19 (2 ore):

Commento (risposta ad una questione emersa nella lez. precedente): La convergenza quasi ovunque su $L^1(0,1)$ non è indotta da una topologia.
Prima variante del teorema di Weierstrass (ruolo della compattezza dei sottolivelli della funzione).
Seconda variante del teorema di Weierstrass (ruolo della crescita all'infinito della funzione).
Funzione (seq.) semicontinua inferiormente. Caratterizzazioni della (seq.) semicontinuità inferiore.
Funzione (seq.) coercitiva. Esempi. Osservazioni varie.
Teorema di Tonelli (generalizzazione del teorema di Weierstrass - metodo diretto del CdV): esistenza del minimo. Unicità del punto di minimo se è garantita la stretta convessità.
1) Tentativo di applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto allo studio del problema di minimo per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\, dx$ su $X = L^2(0,1)$; la dim. (diretta) dell'esistenza del minimo (unico) per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\, dx$ su $X = L^2(0,1)$.
Lo spazio $L^2(a,b)$: convergenza forte e convergenza debole. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. La convergenza forte implica la convergenza debole.

06/05/19 (2 ore):

Lo spazio $L^2(a,b)$: convergenza forte e convergenza debole. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. La convergenza forte implica la convergenza debole, ma non vale il viceversa (teorema di Riemann-Lebegsue; la sua applicazione garantisce che $u_h(x) = \sin(2\pi hx)$ converge debole in $L^2(0,1)$ alla funzione $u \equiv 0$, ma non forte). Alcuni risultati astratti di continuità/semicontinuità della norma in $L^2(a,b)$ rispetto alla convergenza forte/convergenza debole, e la compattezza della palla chiusa in $L^2(a,b)$ rispetto alla convergenza debole (senza dim.).
1) Tentativo di applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto allo studio del problema di minimo per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\, dx$ su $X = L^2(0,1)$ *rispetto alla convergenza forte e il suo fallimento; rispetto alla convergenza debole.*
Road map del metodo diretto (il quadro teorico generale per provare l'esistenza di un minimo per funzionali).
2) Tentativo di applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto ad un funzionale integrale dipendente dalla funzione u e dalla derivata u' : $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\, dx$ su $X = C^1([a,b])$ con dati nulli al bordo. Si ha $\inf_X F(u) < +\infty$; sia $\{u_h\}_h$ una successione minimizzante per F in X; risulta che $\{u_h\}_h$ è limitata in $L^2(a,b)$; inoltre $\{u_h\}_h$ è equilimitata ed equicontinua in $\mathcal{C}^0([a,b])$.

08/05/19 (3 ore):

Compattezza debole in $L^2(a,b)$ e teorema di Ascoli-Arzelà (compattezza in $\mathcal{C}^0([a,b])$). La necessità di introdurre un nuovo spazio di funzioni e una convergenza 'naturale' data dal problema.
Funzioni assolutamente continue $AC([a,b])$: definizioni (di Tonelli e di Vitali) a confronto e alcune proprietà, confronto con le funzioni lipschitziane, con le funzioni uniformemente continue, $\mathcal{C}^1([a,b])$.
Esempio di funzione in $AC([0,1])$, ma non in $\mathcal{C}^1([a,b])$. Lo spazio delle funzioni $H_0^1(a,b)$. Il problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\, dx$ su $X = H_0^1(a,b)$.

Un risultato di esistenza di un minimo per $F(u) = \int_a^b [f(u'(x)) + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = H_0^1(a,b)$. Cenno alla regolarità del minimo se i dati sono regolari.
Presentazione del video su Ennio De Giorgi (https://www.youtube.com/watch?v=TLPqsqknM3g)