

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Matematica

Corso di Calcolo delle Variazioni - a.a. 2018/19

docente: Prof. Anneliese Defranceschi

e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it

homepage: <http://latemar.science.unitn.it/defranceschi>

Nota: L'esame consiste in una prova orale sugli argomenti svolti a lezione.

Introduzione al corso. Ottimizzazione in \mathbb{R} (in \mathbb{R}^n) (teorema di Weierstrass; variazione prima e variazione seconda, punti critici, convessità).

Brevi cenni storici del CdV. Integrali variazionali (integrando variazionale, funzione di Lagrange o lagrangiana). Il problema standard del CdV. Esempi di modellizzazione di problemi classici mediante problemi variazionali (curva di minima lunghezza, la brachistocrona, superficie di rotazione di area minima).

Commenti sulla (non)-esistenza di minimi e sulla regolarità di minimi.

Metodi indiretti (classici)

Problemi variazionali (in dimensione uno e caso scalare). Variazione prima e variazione seconda. Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni. Condizioni necessarie per il problema variazionale standard: Equazioni di Eulero-Lagrange (estremali deboli, estremali,..., funzioni minimizzanti...). Condizioni sufficienti (convessità/convessità indebolita). Un integrale primo per un funzionale con lagrangiana autonoma.

Casi particolari dell'equazione di Eulero-Lagrange. Discussione dei modelli presentati nell'introduzione (retta, cicloide, catenaria/catenoide).

Discussione di un problema variazionale relativo a insiemi di funzioni ammissibili 'non'-standard.

Problemi variazionali con vincoli isoperimetrici (in dimensione uno e il caso scalare). Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Applicazioni varie: il problema di Didone; il problema del filo sospeso.

Disuguaglianze di Poincarè-Wirtinger. Applicazioni: il problema di Didone. La disuguaglianza isoperimetrica (dim. di Hurwitz).

Lemma di Du Bois-Reymond e un suo corollario. Equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale. Estremali spezzati (eq. di Eulero-Lagrange in forma integrale e le condizioni di Erdmann-Weierstrass). Applicazioni (il doppio pozzo).

Problemi variazionali (in dimensione uno e caso scalare). Minimi relativi deboli e forti (stretti). Esempi e controesempi (esempio di Scheeffer). Variazione seconda e condizioni sufficienti per minimi relativi deboli. La non-sufficientza della positività della variazione seconda per minimi relativi deboli (esempio di Scheeffer).

Condizioni necessarie e sufficienti per minimi relativi deboli: Condizione di Legendre. Teoria di Jacobi: integrale accessorio e lagrangiana accessoria, campi di Jacobi. Lemma di Legendre e di Jacobi. Punti coniugati. Esempi e applicazioni.

Condizioni necessarie e sufficienti per minimi relativi forti: La funzione di eccesso di Weierstrass. Teoria dei campi di Weierstrass: campi di estremali e funzione pendenza. Equazione di Eulero (modificata) per il campo. Equazioni di Carathéodory. L'integrale invariante di Hilbert. Le condizioni forti di Weierstrass. Le condizioni di Legendre stretti/forti. Punti coniugati ed esistenza di campi estremali in cui immergere un estremale. Esempi e applicazioni.

Metodi diretti

Introduzione. Teorema di Weierstrass e qualche sua variante. Funzione semicontinua inferiormente e sottolivelli compatti. Funzione coerciva. Teorema di Tonelli (generalizzazione del teorema di Weierstrass). Esistenza del minimo (astratto).

Applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto al funzionale $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)] dx$ su $X = L^2(0,1)$.

Applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto al funzionale $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)] dx$ su $X = H_0^1(a,b)$. Funzioni assolutamente continue $AC([a,b])$: definizioni a confronto e alcune proprietà.

Un risultato di esistenza di un minimo per $F(u) = \int_a^b [f(u'(x)) + g(x)u(x)] dx$ su $X = H_0^1(a, b)$.

Bibliografia

Note del corso

- 1) F. Angrisani, G. Ascione, C. Leone, C. Mantegazza: Appunti di Calcolo delle Variazioni. Amazon (2019).
- 2) B. Dacorogna: Introduction to the Calculus of Variations. Imperial College Press (2004).
- 3) M. Giaquinta, S. Hildebrandt: Calculus of Variations I. Springer Verlag (1994).
- 4) H. Sagan: Introduction to the Calculus of Variations. Dover Publ., Inc., New York (1969).
- 5) G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt: One-dimensional variational problems. Clarendon Press, Oxford (1998).
- 6) U. Brechtken-Manderscheid: Einfuehrung in die Variationsrechnung. Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt (1983).
- 7) J.L. Troutman: Variational Calculus with Elementary Convexity. Springer, New York (1983).
 - a) H. Brezis: Analisi Funzionale. Liguori, Napoli (1986).
 - b) I. Fonseca, G. Leoni: Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces. Springer NY (2007).