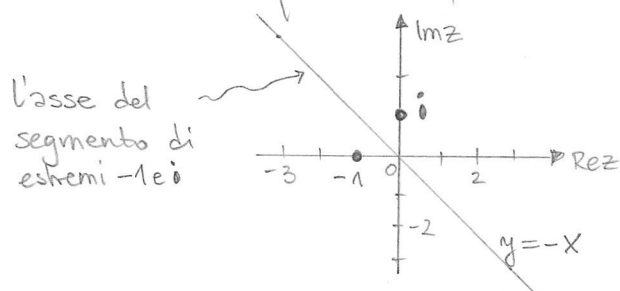


- 1) Oss. che l'eq. $|z-i| = |z+1|$ è soddisfatta da tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che nel piano di Gauss distano da i tanto quanto distano da -1 ; quindi sono tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che si trovano sulla bisettrice del 2° e 4° quadrante, ossia tutti gli $z \in \mathbb{C}$ con $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ con $y = -x$.



D'altra parte gli $z \in \mathbb{C}$ soddisfacenti $\sqrt{2} \leq |z| \leq 4$ sono tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ la cui distanza dall'origine è maggiore o uguale a $\sqrt{2}$ e minore o uguale a 4, ossia tutti gli $z \in \mathbb{C}$

che si trovano sulla corona circolare delimitata dalle due circonferenze di centro l'origine e di raggio rispettivamente $\sqrt{2}$ e 4. Quindi, nel piano di Gauss l'insieme delle soluzioni del sistema

$$|z-i| = |z+1|$$

$$\sqrt{2} \leq |z| \leq 4$$

è rappresentato dall'unione di due segmenti chiusi.

Analiticamente, ponendo $z = x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ nel sistema dato otteniamo

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \\ \sqrt{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4 \end{cases},$$

ossia

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \\ \sqrt{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4 \end{cases},$$

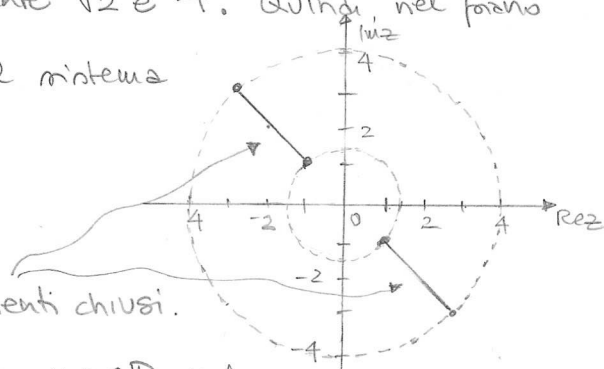
da cui

$$\begin{cases} y = -x \\ 1 \leq |x| \leq 2\sqrt{2} \end{cases},$$

ossia $\{(x, -x) : -2\sqrt{2} \leq x \leq -1\} \cup \{(x, -x) : 1 \leq x \leq 2\sqrt{2}\}$.

Risposta: (b).

□



2) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2 \arcsin x + \sqrt[3]{1+x}$.

i) f è continua su $[-1, 1]$; inoltre $f(-1) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$, $f(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \sqrt[3]{2}$.
Quindi f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri.

ii) Oss. che f è derivabile su $] -1, 1[$ e $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} > 0$ su $] -1, 1[$. Dunque f è strett. crescente su $] -1, 1[$; poiché f è continua su $[-1, 1]$, segue che f è strett. crescente su $[-1, 1]$.

Abbiamo che $f(x) = 1 \iff x = 0$. Poiché $f'(0) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \neq 0$,

risulta che $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{3}{7}$ e l'eq. della retta tg al grafico di f^{-1} in 1 definita da $y = f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(x-1)$ risulta

$y = 0 + \frac{3}{7}(x-1)$, ossia $y = \frac{3}{7}x - \frac{3}{7}$. Quindi l'affermazione in ii) è falsa.

iii) Oss. che f è continua in $x=1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} \right] = +\infty$; quindi la retta di eq. $x=1$ è retta tg verticale al grafico di f in $(1, f(1)) = (1, \pi + \sqrt[3]{2})$. Quindi il punto $x = \pi + \sqrt[3]{2}$ è un punto con tangente orizzontale al grafico di f^{-1} . Quindi l'affermazione in iii) è vera.

iv) Abbiamo provato in ii) che $(f^{-1})'(1) = \frac{3}{7}$, e quindi l'affermazione in iv) è falsa.

Risposta: (b).



3) Dobbiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\cos x - \sqrt[3]{1+x^2})}{\log^2(1+x) - x \sin x}$, limite che si presenta nella forma indet. $\frac{0}{0}$.

Ricordiamo che $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$ e $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Quindi otteniamo $\log^2(1+x) - x \sin x = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 - x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$
 $= x^2 - 2 \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$
 $= -x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Dobbiamo sviluppare allora il numeratore almeno fino all'ordine 3.

Poiché $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$, e $(1+t)^a = 1 + at + \frac{a(a-1)}{2!}t^2 + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, da cui $\sqrt[3]{1+x^2} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\cos x - \sqrt[3]{1+x^2})}{\log^2(1+x) - x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - (1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)))}{-x^3 + o(x^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{5}{6}x^3 + o(x^3)}{-x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{5}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}. \end{aligned}$$

Risposta: (c).

□

4) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile. Allora $\exists x_0 \in [a, b]$ tale che

(a) $\frac{f(a)+f(b)}{2} = f(x_0)$ (V) : segue dal teorema dei valori intermedi
[f assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$; in particolare $\frac{f(a)+f(b)}{2}$].

(b) $\frac{f'(a)-f'(b)}{2} = f'(x_0)$ (F) : basta prendere $f(x) = x$ su $[0, 1]$
Allora $\frac{f'(0)-f'(1)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$
e $f'(x) = 1 \neq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$.

(c) $\frac{f(b)-f(a)}{2} = f(x_0)$ (F) : basta prendere $f(x) = x+1$ su $[0, 1]$
Allora $\frac{f(1)-f(0)}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$
e $f([0, 1]) = [1, 2] \not\ni \frac{1}{2}$.

(d) $\frac{f'(b)-f'(a)}{2} = f'(x_0)$ (F) : basta prendere l'esempio in (b).

Risposta: (a).

□

5) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strett. convessa e derivabile una volta.

Quale delle seg. affermazioni è falsa?

(a) La funzione f ammette almeno un punto di minimo. (F)

Basta considerare $f(x) = e^x$.

(b) la funzione f ammette al più un pt. di minimo. (V)

Poiché f è strettamente convessa e derivabile una volta vale che

$$(*) \quad f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Con = se e solo se $x=y$. Supponiamo allora che esistano due pt. di minimo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Poiché f è derivabile in $\mathbb{R}$, si ha in particolare $f'(x_1) = 0$.

Da (*) con $x = x_1$ si ha $f(y) \geq f(x_1) \quad \forall y \in \mathbb{R}$, con $f(y) > f(x_1) \quad \forall y \neq x_1$ e quindi $f(x_2) > f(x_1)$ se $x_2 \neq x_1$; ma questo è in contraddizione con l'ipotesi che x_2 è un pt. di minimo per f su $\mathbb{R}$ ($f(x_2) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$). Quindi deve essere $x_2 = x_1$.

(c) Se si ha $f'(1) > 0$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (V)

Infatti, da (*) otteniamo in particolare che

$$f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1) \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(1)(x-1) = +\infty$, dal teorema del confronto segue $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(d) la funzione f' è strettamente crescente. (V)

Infatti, siano $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Da (*) si ottiene

$$(i) \quad f(y) > f(x) + f'(x)(y-x)$$

$$(ii) \quad f(x) > f(y) + f'(y)(x-y).$$

Quindi

$$f'(x)(y-x) + f(x) < f(y) < f(x) - f'(y)(x-y) = f(x) + f'(y)(y-x)$$

da cui

$$f'(x)(y-x) < f'(y)(y-x)$$

e quindi $f'(x) < f'(y)$ (notare che $y-x > 0$).

Poiché $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ sono arbitrarie, possiamo concludere che

f' è una funzione strett. crescente in $\mathbb{R}$. Oss. che da questo fatto segue che f ha al più un pt. critico, e quindi da (d) segue anche (b). $\square$

Oss. Per rispondere ai quesiti in 5) non è nec. fare tutte le dim. qui svolte. Che (a) sia falsa si vede subito con il controesempio $f(x) = x^2$. Anche "in mente" come può esserci grafico di una funzione strett. convessa e derivabile "i". Si deduce subito che f' è strett. crescente (basta "bruciare" le rette tangenti al grafico di f in "ogni punto", quindi (d) è vera. Da (d) vera segue anche subito che f' può annullarsi al più una volta e quindi f può avere al più un pt. di minimo, e quindi (b) è vera. Poi dalla crescenza delle funz. convexe e deriv. la (c) è immediata (V). $\square$

6) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Le serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha (\log n)^{1/2}} \quad a_n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^\alpha + n^2} \quad b_n$$

soddisfanno entrambe il criterio di Leibniz se e solo se $\alpha > 2$.

Infatti, per la prima serie abbiamo che $a_n > 0$, $a_n \downarrow$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
 $\Leftrightarrow \alpha > 0$; per la seconda serie abbiamo che $b_n > 0$, $b_n \downarrow$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$
 $\Leftrightarrow \alpha > 2$.

Risposta: (d).

□

7) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{(\alpha-1)n}}{(1+n^3)^\beta (\log n)^{2\alpha}}$.

(a) $(\alpha, \beta) = (-1, -\frac{1}{3})$: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e^{2n} (1+n^3)^{-1/3} (\log n)^{-2}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1+n^3)^{1/3} (\log n)^2}{e^{2n}}$

Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+n^3)^{1/3} (\log n)^2}{e^n} = 0$ (gerarchia degli infiniti)

si ha che $0 < \frac{(1+n^3)^{1/3} (\log n)^2}{e^{2n}} < \frac{1}{e^n} \quad \forall n \geq \bar{n}$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e^n} < +\infty$, per il criterio del confronto anche la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1+n^3)^{1/3} (\log n)^2}{e^{2n}}$ è convergente.

(b) $(\alpha, \beta) = (1, -\frac{1}{3})$: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(1+n^3)^{-1/3} (\log n)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1+n^3)^{1/3}}{(\log n)^2}$ diverge positivamente.

essendo una serie a termini positivi e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+n^3)^{1/3}}{(\log n)^2} = +\infty$.

(cioè non è soddisfatta la cond. nec. per la converg. di una serie).

(c) $(\alpha, \beta) = (1, \frac{1}{4})$: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(1+n^3)^{1/4} (\log n)^2}$ è divergente positivamente:

infatti $\frac{1}{(1+n^3)^{1/4} (\log n)^2} \sim \frac{1}{n^{3/4} (\log n)^2}$ per $n \rightarrow +\infty$

e $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/4} (\log n)^2} = +\infty$.

(d) $(\alpha, \beta) = (2, \frac{1}{3})$: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n}{(1+n^3)^{1/3} (\log n)^4}$; anche in questo caso non è soddisfatta la condizione nec. per la convergenza di una serie, poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{(1+n^3)^{1/3} (\log n)^4} = +\infty$ e

non zero.

Risposta: (a).

□

- 8) $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua, $T > 0$. La media integrale di f su $[0, T]$ è $M = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$. Per ogni $\varepsilon > 0$, la media di $x \mapsto f(\varepsilon x)$ su $[0, T/\varepsilon]$ è data da $\frac{1}{T/\varepsilon} \int_0^{T/\varepsilon} f(\varepsilon x) dx$. Ora

$$\frac{1}{T/\varepsilon} \int_0^{T/\varepsilon} f(\varepsilon x) dx = \frac{1}{T/\varepsilon} \int_0^T f(t) \frac{1}{\varepsilon} dt = \frac{\varepsilon}{T} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T f(t) dt = \underline{\underline{M}}.$$

$t = \varepsilon x$
 $x = \frac{t}{\varepsilon}$
 $dx = \frac{1}{\varepsilon} dt$

Risposta: (a).

□

- 9) Sia $f:]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - \log x^2}{x}$, ossia $f(x) = x^{-2/3} - 2 \frac{\log(-x)}{x}$. Allora la famiglia di tutte le primitive di f su $]-\infty, 0[$

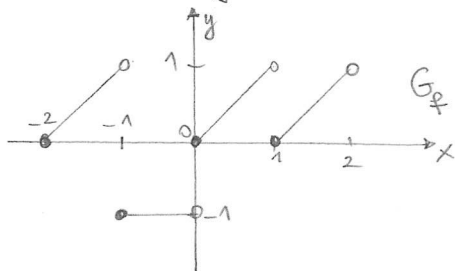
$$\int f(x) dx = \int \left[x^{-2/3} - 2 \frac{\log(-x)}{x} \right] dx = 3x^{1/3} - \log^2(-x) + c.$$

Allora $G(x) = 3x^{1/3} - \log^2(-x) + 3$. Risulta $G(-\frac{1}{e}) = 3(-\frac{1}{e})^{1/3} - \log^2(\frac{1}{e}) + 3$
 $= -\frac{3}{\sqrt[3]{e}} - 1 + 3 = -\frac{3}{\sqrt[3]{e}} + 2.$

Risposta: (b).

□

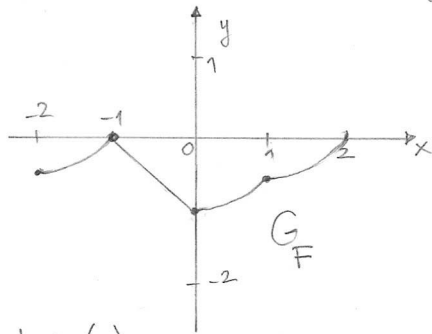
- 10) Sia $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da



$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1, 0[\\ x - [x] & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $F: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$.

Possono tracciare subito il grafico di $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{2} & \text{su } [-2, -1] \\ -x - 1 & \text{su } [-1, 0] \\ -1 + \frac{x^2}{2} & \text{su } [0, 1] \\ \frac{x^2}{2} - x = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2} & \text{su } [1, 2] \end{cases}$



Risposta: (c).

□

11) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ che soddisfa $f(0) = f'(0) = 0$ e sia $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Notiamo che $F(0) = 0$. Inoltre dal TFC segue $F'(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $F'(0) = f(0) = 0$; quindi $x=0$ è un pt. critico per F .

Inoltre, essendo $f \in \mathcal{C}^1$, da $F'(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ segue $F''(x) = f'(x) \forall x \in \mathbb{R}$, e in particolare $F''(0) = f'(0) = 0$.

Quindi da $F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$ segue $F(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Oss. che $x=0$ può essere anche solo un pt. di flesso e non nec. un pt. di massimo o di minimo locale per F .

Inoltre F è di classe $\mathcal{C}^3$ solo se $f \in \mathcal{C}^2$; inoltre F è un infinitesimo di ordine 3 per $x \rightarrow 0$ solo se $F'''(0) \neq 0$.

Risposta: (b).

□

12) Sia $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(x+\frac{1}{x})^{\alpha/2}}$

$$I(2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} [\arctan M - \arctan 0] = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

$$I(4) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x+\frac{1}{x})^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^M \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{M^2+1} + \frac{1}{1} \right] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow I(2)I(4) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

□

Risposta: (b).

Oss. Si può provare che le affermaz. in (a), (c), (d) non sono nec. vere trovando dei controesempi.
(a) $f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{x^3}{3}$ non ha pt. di max o pt. di min. loc. in 0
(c) $f(x) = x|x|$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt \neq \int_0^x f(t) dt$
(d) $f(x) = x^3$ $F(x) = \frac{x^4}{4}$ è un infinitesimo di ordine 4 per $x \rightarrow 0$.
□

13) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \int_{n - \frac{1}{n^{2\alpha}}}^n \frac{\arctan x}{x(x+1)} dx.$$

Grazie al teorema della media integrale $\forall n \exists c_n \in [n - \frac{1}{n^{2\alpha}}, n]$ tale che

$$n^{2\alpha} \int_{n - \frac{1}{n^{2\alpha}}}^n \frac{\arctan x}{x(x+1)} dx = \frac{\arctan c_n}{c_n(c_n+1)},$$

da cui

$$n^3 \int_{n - \frac{1}{n^{2\alpha}}}^n \frac{\arctan x}{x(x+1)} dx = \frac{n^3}{n^{2\alpha}} \frac{\arctan c_n}{c_n(c_n+1)}.$$

Oss. che $1 \leq \frac{c_n}{n} \leq 1 - \frac{1}{n^{2\alpha+1}}$ e quindi $\frac{c_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Notiamo che

$$n^3 \int_{n - \frac{1}{n^{2\alpha}}}^n \frac{\arctan x}{x(x+1)} dx = \underbrace{\frac{n^2}{c_n(c_n+1)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n^{2\alpha}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}} \arctan c_n.$$

$\downarrow \exists \text{ finito } \neq 0$
 $\Leftrightarrow 2\alpha = 1$
 $\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

Risposta: (b).

14) (a) $\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y'(0) = y(0) - 0 \Rightarrow y'(0) = 0.$

Derivando l'eq. diff. $y' = y - x$ si ottiene $y'' = y' - 1$, per cui $y''(0) = y'(0) - 1$, ossia $y''(0) = -1$.

Possiamo allora scrivere $y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

e il pbm. di Cauchy in a) ha la soluzione con ordine di infinitesimo uguale a 2, per $x \rightarrow 0$.

(b) $\begin{cases} y' = y - \sin^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y'(0) = y(0) - \sin^2 0 \Rightarrow y'(0) = 0.$

Derivando l'eq. diff. $y' = y - \sin^2 x$ si ottiene $y'' = y' - 2 \sin x \cos x$, per cui $y''(0) = y'(0) - 2 \sin 0 \cos 0$, ossia $y''(0) = 0$.

Derivando ulteriormente l'eq. $y'' = y' - 2 \sin x \cos x$ si ottiene

$y''' = y'' - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x$, per cui $y'''(0) = y''(0) - 2\cos^2 0 + 2\sin^2 0$,
 ossia $y'''(0) = -2$. Possiamo allora scrivere $y(x) = -\frac{2}{3!}x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
 e il plom. di Cauchy in b) ha la soluzione con ordine di infinitesimo
 3 , per $x \rightarrow 0$.

(c) Procedendo come in a) e b) si ottiene per c) che $y(x) = \frac{12}{5!}x^5 + o(x^5)$
 per $x \rightarrow 0$.

(d) In questo caso si ottiene subito che $y(x) = -x + o(x)$, per $x \rightarrow 0$.

Risposta: (c).



15) Oss. che l'eq. caratteristica associata all'eq. diff. $u'' + \pi^2 u = 0$ è
 $z^2 + \pi^2 = 0$, le cui soluzioni sono $z_{1/2} = \pm \pi i$. Dunque l'integrale
 generale dell'eq. diff. $u'' + \pi^2 u = 0$ è quindi dato da $u(x) = c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x$,
 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Oss. che $u(0) = c_1$, $u(1) = -c_1$. Quindi $u(0) = u(1)$
 $\Leftrightarrow c_1 = 0$ e quindi $S = \{c \sin \pi x, c \in \mathbb{R}\}$.

i) Esistono infinite funzioni in S : (V)

ii) $\exists$ una funzione $u(x) \in S$ per la quale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{x} = 1$: (V) $u(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x$

iii) $\exists$ una funzione $u(x) \in S$ per la quale si ha $\int_0^1 u(x) dx = 1$: (V)

$$\text{Basta oss. che } \int_0^1 \sin \pi x dx = -C \frac{\cos \pi x}{\pi} \Big|_0^1 = +\frac{C}{\pi} + \frac{C}{\pi} = \frac{2C}{\pi}$$

Quindi $\frac{2C}{\pi} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$ e $u(x) = \frac{\pi}{2} \sin \pi x$ è
 la funzione ricercata.

iv) Ogni funzione in S non nulla è periodica di periodo 2: (V)

infatti, sia $u(x) = c \sin \pi x$, $c \neq 0$. Allora

$$u(x+2) = c \sin \pi(x+2) = c \sin(\pi x + 2\pi) = c \sin \pi x = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: (d).

