2021-01-23 primo appello

1.

Nel piano di Gauss l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} |z-i| = |z+1| \\ \sqrt{2} \le |z| \le 4 \end{cases}$$

è rappresentato

(a) da due punti isolati
(b) dall'unione di due segmenti chiusi
(c) da una corona circolare
(d) da nessuna delle rappresentazioni indicate nelle altre risposte

2.

Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = 2 \arcsin x + \sqrt[3]{1+x}.$$

Quante delle seguenti affermazioni sono vere?
i) La funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-1, 1]$.
ii) L'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} in 1 è $y = \frac{3}{7}x + 1$.
iii) Il punto $x = \pi + \sqrt[3]{2}$ è un punto con tangente orizzontale al grafico di f^{-1}.
iv) Si ha $(f^{-1})'(1) = \frac{7}{3}$.

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

3.

Il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x(\cos x - \sqrt[3]{1+x^2})}{\log^2(1+x) - x \sin x}$$

è uguale a

(a) $+\infty$
(b) $-\frac{5}{6}$
(c) $\frac{5}{6}$
(d) 1

4.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile. Allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che

(a) $\frac{f(a)+f(b)}{2} = f(x_0)$
(b) $\frac{f'(a)-f'(b)}{2} = f'(x_0)$
(c) $\frac{f(b)-f(a)}{2} = f(x_0)$
(d) $\frac{f'(b)-f'(a)}{2} = f'(x_0)$

5.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa e derivabile una volta. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

(a) La funzione f ammette almeno un punto di minimo.
(b) La funzione f ammette al più un punto di minimo.
(c) Se si ha $f'(1) > 0$, allora vale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
(d) La funzione f' è strettamente crescente.

6.

Sia α un numero reale. Le serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha (\log n)^{1/2}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^\alpha + n^2}$$

soddisfano entrambe il criterio di Leibniz se e solo se si ha

(a) $\alpha < 0$
(b) $\alpha \geq 0$
(c) $0 \leq \alpha \leq 2$
(d) $\alpha > 2$

7.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{(\alpha-1)n}}{(1+n^3)^\beta (\log n)^{2\alpha}}.$$

Per quale delle seguenti coppie (α, β) la serie è convergente?

(a) $(-1, -\frac{1}{3})$
(b) $(1, -\frac{1}{3})$
(c) $(1, \frac{1}{4})$
(d) $(2, \frac{1}{3})$

8.

Siano T un numero reale positivo, $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e M la media integrale di f su $[0, T]$. Per ogni numero reale positivo ε la media della funzione $x \mapsto f(\varepsilon x)$ su $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ è uguale a

(a) M
(b) εM
(c) $\frac{M}{\varepsilon}$
(d) $\varepsilon^2 M$

9.

Sia $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - \log x^2}{x}$$

e sia G la primitiva di f che vale 0 in -1. Allora G in $-\frac{1}{e}$

(a) non è definita
(b) vale $2 - \frac{3}{\sqrt[3]{e}}$
(c) vale $4 + \frac{3}{\sqrt[3]{e}}$
(d) vale $-\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

10.

Sia $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1, 0[\\ x - [x] & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $F : [-2,2] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt.$$

Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

(a) Il punto $x = 0$ è un punto di minimo assoluto per F.
(b) La funzione F è non positiva su $[-2,2]$.
(c) La funzione F è una funzione affine su $[0,2]$.
(d) La funzione F è strettamente decrescente su $[-1,0]$.

11.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ che soddisfa $f(0) = f'(0) = 0$ e sia

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt.$$

Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

(a) La funzione F ha un punto di massimo o di minimo locale in 0.
(b) Si ha $F(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$.
(c) La funzione F è di classe $\mathcal{C}^3$.
(d) La funzione F è un infinitesimo di ordine 3 per $x \to 0$.

12.

Sia α un numero reale positivo e sia

$$I(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+x^{-1})^{\alpha/2}}.$$

Allora il prodotto $I(2)I(4)$ appartiene all'intervallo

(a) $]-\infty, 0]$
(b) $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$
(c) $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$
(d) $]\pi, +\infty[$

13.

Per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \int_{n-\frac{1}{n^{2\alpha}}}^{n} \frac{\arctan x}{x(x+1)}\,dx$$

esiste finito diverso da 0?

(a) $\alpha = -1$
(b) $\alpha = \frac{1}{2}$
(c) $\alpha = 1$
(d) Nessuno dei valori indicati nelle altre risposte

14.

Quale dei seguenti problemi di Cauchy ha la soluzione con ordine di infinitesimo maggiore, per $x \to 0$?

(a) $\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' = y - \sin^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = -y + e^{-x^2} - 1 + x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y' = y - \cos^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

15.

Si consideri l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + \pi^2 u = 0$$

che soddisfano l'uguaglianza $u(0) = u(1)$.
Quante delle seguenti quattro affermazioni sono vere?
i) Esistono infinite funzioni in $\mathcal{S}$.
ii) Esiste una funzione $u(x) \in \mathcal{S}$ per la quale si ha $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{u(x)}{x} = 1$.
iii) Esiste una funzione $u(x) \in \mathcal{S}$ per la quale si ha $\displaystyle\int_0^1 u(x)\,dx = 1$.
iv) Ogni funzione in $\mathcal{S}$ non nulla è periodica di periodo 2.

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4