

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Fisica
TERZO APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1
a.a. 2020/21 - Trento, 21 giugno 2021

1. Sia $(a_n)_n$ una succ. di nr. reali positivi t.c. $\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{4} \quad \forall n \geq 1$.

• Allora $0 < a_n < \frac{1}{4^n} \quad \forall n \geq 1$.

Per il criterio del confronto segue $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

(V)

• Poiché

$$0 < a_n < \frac{1}{4^n} \quad \forall n \geq 1,$$

si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} < \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

(V)

serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ con $|q| < 1$
è convergente con somma $= \frac{1}{1-q}$.

• Poiché $a_n \rightarrow 0^+$, si ha $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0^+$ e quindi

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \rightarrow +\infty, \quad \text{quindi banalmente}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = +\infty.$$

(V)

non è una succ. infinitesima

• $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt[n]{a_n}$ è convergente (V). Infatti, la serie data è assolutamente convergente: basta osservare che

$$0 < |(-1)^n \sqrt[n]{a_n}| \leq \sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ è convergente (serie geom. con ragione $q = \frac{1}{2}$), dal criterio del confronto segue che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \sqrt[n]{a_n}|$ è convergente. ■

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)^{-\frac{2}{\log x}}$: Il limite si presenta nella forma indeterminata 0^0 .

Oss. che $\left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)^{-\frac{2}{\log x}} = e^{-\frac{2}{\log x} \log \left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)}$.

Ora, per $x > 0$

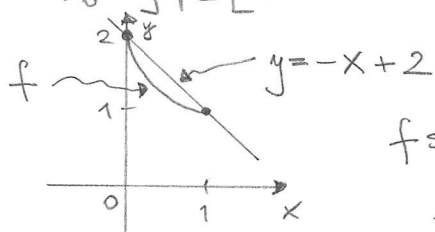
$$\begin{aligned} -\frac{2}{\log x^\alpha} \cdot \log \left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) &= -\frac{2}{\alpha \log x} \cdot \log \left(\frac{1}{x^2} \left(3 - \frac{2}{x} \right) \right) \\ &= -\frac{2}{\alpha \log x} \left(\log \frac{1}{x^2} + \log \left(3 - \frac{2}{x} \right) \right) \\ &= -\frac{2}{\alpha \log x} \left(-2 \log x + \log \left(3 - \frac{2}{x} \right) \right) \\ &= \frac{4}{\alpha} - \frac{2}{\alpha \log x} \cdot \log \left(3 - \frac{2}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)^{-\frac{2}{\log x^\alpha}} = e \iff \underline{\underline{\alpha = 4.}}$ ■

3. $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1$, strettamente convessa tale che $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$.

Stabilite per ciascuna delle seg. affermazioni se segue dalle ipotesi.

• $\exists x_0 \in]0,1[$ tale che $f(x_0) + x_0 - 2 = 0$ (F):



$$f \text{ strett. convessa su } [x_1, x_2] \iff \forall x \in]x_1, x_2[\\ f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Quindi, per $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1$

otteniamo

$$f(x) < 2 + \frac{(1-2)}{1} (x-0) \quad \forall x \in]0,1[$$

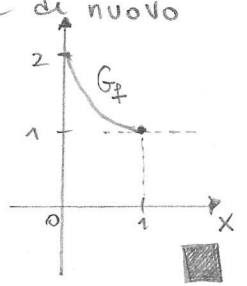
$$\text{ovvero } f(x) + x - 2 < 0 \quad \forall x \in]0,1[.$$

• $\exists x_0 \in]0,1[$ t.c. $f'(x_0) = 0$ (F): basta considerare $f(x) = (x-1)^2 + 1$.

• $\exists x_0 \in]0,1[$ t.c. $f'(x_0) = -1$ (V): segue subito dal teorema di Lagrange. Infatti $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su $[0,1]$, derivabile su $]0,1[$; quindi $\exists x_0 \in]0,1[$ tale che

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(x_0) \quad , \quad \text{also} \quad 1 - 2 = f'(x_0).$$

- $\forall x \in [0, 1]$ si ha $f'(x) \neq 0$ (F) : basta prendere di nuovo
 $f(x) = (x-1)^2 + 1$; risulta che $f'(1) = 0$
- 



4. $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_1^x \frac{\arctan t}{1 + \sqrt{t}} dt \quad F(1) = 0$$

- Sia $f(t) = \frac{\arctan t}{1 + \sqrt{1+t^2}}$; $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; f è una funzione continua e dispari

poiché $\arctan \frac{1}{1+\sqrt{t}}$ è pari. Risultato che F è una funzione pari: infatti

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(-x) = \int_1^{-x} \frac{\arctan t}{1+\sqrt{|t|}} dt = \int_{-1}^x \frac{\arctan(-s)}{1+\sqrt{|s|}} (-1) ds =$$
$$= \int_{-1}^1 \frac{\arctan s}{1+\sqrt{|s|}} ds + \int_1^x \frac{\arctan s}{1+\sqrt{|s|}} ds = F(x).$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

Quindi F si annulla in $x=1$ e in $x=-1$.

- Per il TFC si ha $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$; in particolare $F'(0) = 0$

Inoltre $F(0) = \int_1^0 \frac{\arctan t}{1+\sqrt{1+t}} dt = - \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+\sqrt{1+t}} dt < 0$
 > 0 su $]0,1]$

L'eq. della retta tg al grafico di F nel pt. di ascissa $x=0$ è data da

$y = F(0) + F'(0)x$, da cui $y = ax + b$ con $a = 0$ e $b < 0$.

- Oss. che il segno di f risulta $\frac{-}{-2} \frac{-}{-1} \frac{-}{0} \frac{+}{1} \frac{+}{2}$; da $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ segue dunque che $x=0$ è un pt. di minimo assoluto per F .

- Poiché $f(t) \sim \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ per $t \rightarrow +\infty$ risulta che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt = +\infty$,
e quindi F non ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

Essendo F una funzione pari, risulta che F non ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$.

5. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{x-1} + 2x$. Notiamo che f è strett. crescente ($f'(x) = e^{x-1} + 2 > 0$ su $\mathbb{R}$) e quindi iniettiva. Inoltre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Essendo f continua, risulta $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Quindi f è biiettiva e ammette inversa. Notiamo che $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Allora l'eq. della retta tg al grafico di $g \doteq f^{-1}$ nel pt. di ascissa 3 è data da

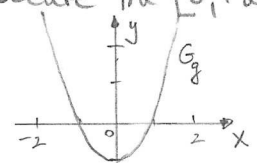
$$y = g(3) + g'(3)(x-3).$$

Poiché $g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e^{1-1} + 2} = \frac{1}{3}$ e $g(3) = 1$

otteniamo $y = 1 + \frac{1}{3}(x-3)$, ossia $-x + 3y = 0$ (o analog. $x - 3y = 0$). Abbiamo $ax + by + c = 0$ con $a = -1$, $b = 3$, $c = 0$ (ma anche $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, oppure un qualsiasi multiplo di questi!)

6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{4}{\pi} \arctan((x^2-1)^3)$ f è pari!

• Oss. che la funzione $g(x) = x^2 - 1$ ha un pt. di minimo assoluto in $x = 0$, è strett. decrescente su $]-\infty, 0]$ e strett. crescente su $[0, +\infty[$. Poiché f è definita come composizione di $g(x)$ con due funzioni strettamente crescenti ($h_1(x) = x^3$ e $h_2(x) = \arctg x$), f conserva la monotonia di $g(x)$: quindi risulta che $x = 0$ è un pt. di minimo locale e assoluto per f (V), e f è strettamente crescente su $[0, +\infty[$ (V).



• Abbiamo $\min_{\mathbb{R}} f = f(0) = \frac{4}{\pi} \arctg(-1) = -\frac{4}{\pi} \arctg 1 = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = -1$.

Inoltre $\sup_{\mathbb{R}} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 2$. Essendo f continua

$$\underline{f(\mathbb{R})} = \left[\min_{\mathbb{R}} f, \sup_{\mathbb{R}} f \right] = \underline{[-1, 2]}.$$

- Infine, sia dato $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x-1)^\alpha} dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \leq 0$, allora la funzione integranda è Riemann integrabile, e l'integrale è convergente.

Se $\alpha > 0$, $\frac{f(x)}{(x-1)^\alpha} :]1, 2] \rightarrow]0, +\infty[$ è continua e

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{(x-1)^\alpha} &= \frac{\pi}{4} \frac{\arctan\left(\frac{(x-1)^3(x+1)^3}{(x-1)^\alpha}\right)}{(x-1)^\alpha} \sim \frac{\pi}{4} (\arctan 2^3) \cdot \frac{(x-1)^3}{(x-1)^\alpha} \\ &= \frac{\pi}{4} (\arctan 2^3) \cdot \frac{1}{(x-1)^{\alpha-3}} \quad \left(\arctan t \sim t \text{ per } t \rightarrow 0 \right) \\ &\quad \text{per } x \rightarrow 1^+. \end{aligned}$$

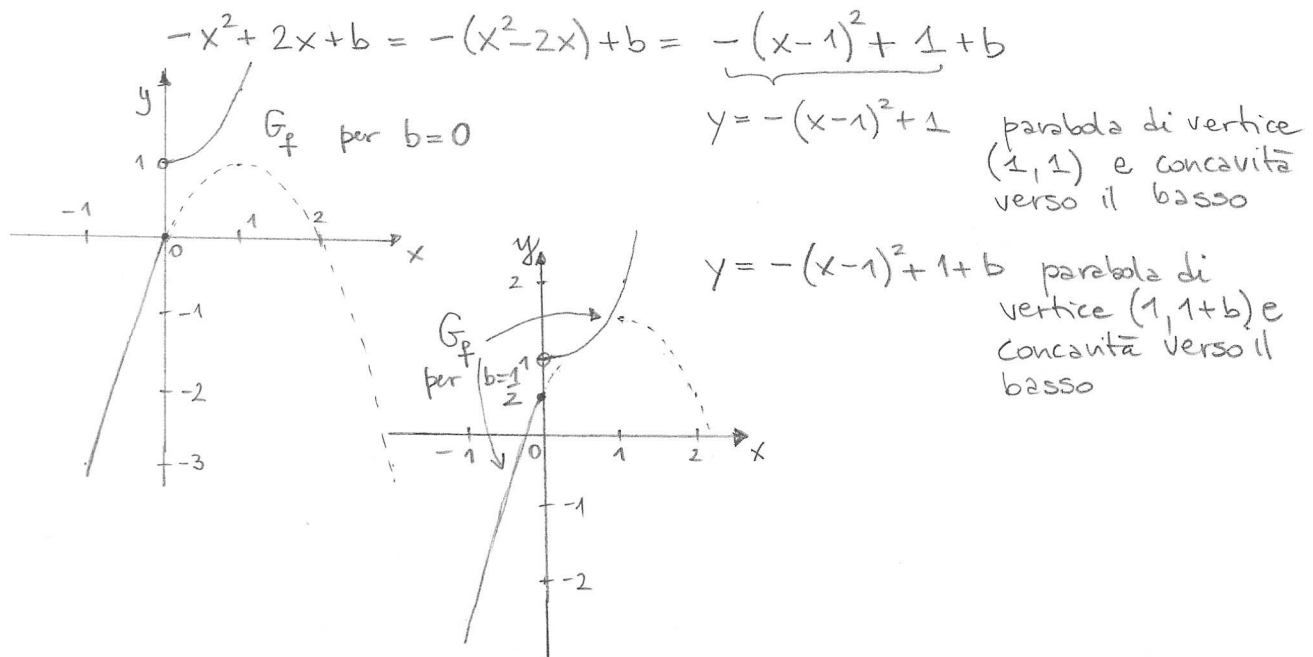
Poiché $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\alpha-3}} dx < +\infty \iff \alpha-3 < 1$, ossia $\alpha < 4$, per il criterio del confronto asintotico $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x-1)^\alpha} dx$ è convergente per $\alpha > 0$ se e solo se $\alpha < 4$. Dunque

$$E_\alpha = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \int_1^2 \frac{f(x)}{(x-1)^\alpha} dx \text{ è convergente} \right\} =]-\infty, 4[.$$

Risulta $\sup E_\alpha = 4$.

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x > 0 \\ -x^2 + 2x + b & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

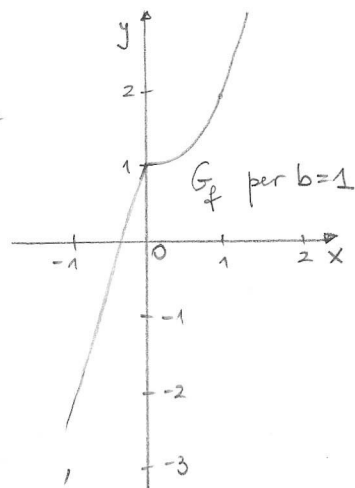
Oss. che



Oss. che $f|_{]-\infty, 0]}(x) = -x^2 + 2x + b$ è strettamente crescente e
 $f(]-\infty, 0]) =]-\infty, b]$; inoltre $f|_{]0, +\infty[}(x) = x^3 + 1$ è strett. crescente
e $f(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$.

- Risulta che f è iniettiva per ogni $b \leq 1$, in particolare $\forall b \in [0, 1]$ (V).
- Inoltre f è suriettiva per ogni $b \geq 1$ (V).
- Oss. che f è biiettiva $\Leftrightarrow b = 1$, e si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x > 0 \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$



$f|_{]-\infty, 0]}$ e $f|_{]0, +\infty[}$ è continua essendo

somma di funzioni continue. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, f è continua anche in $x = 0$.

f è continua in $\mathbb{R}$ (V).

- Infine abbiamo $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x > 0 \\ -2x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Poiché f è continua in $x = 0$, dal collaudo di Lagrange segue
che $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2$.

Quindi f non è derivabile in $x = 0$, ossia l'ultima affermazione
del quesito 7 è (F). ■

8. $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\bar{z}^2 + i|z|) = 0, z\bar{z} = 2\}$.

Per determinare A poniamo $z = x + iy$, dove x e y sono la
parte reale e la parte immaginaria di z , rispettivamente. Poiché $i|z|$ è
puramente immaginario otterremo

$$\operatorname{Re}(\bar{z}^2 + i|z|) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}((x - iy)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(x^2 - 2ixy - y^2) = 0$$

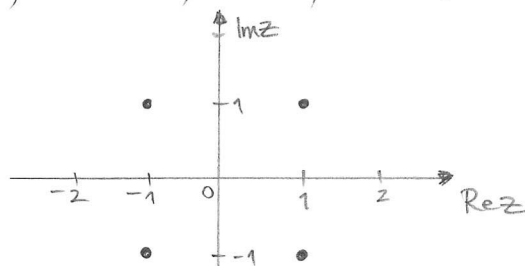
$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0.$$

Allora $\operatorname{Re}(\bar{z}^2 + i|z|) = 0 \Leftrightarrow z = x + i0$ oppure $z = x - i0$.

Imponendo che $z\bar{z} = 2$, ossia $|z|^2 = 2$, risulta

$$2x^2 = 2, \text{ da cui } x = \pm 1.$$

Pertanto $A = \{-1-i, -1+i, 1+i, 1-i\}$.



L'insieme A è costituito dai vertici di un quadrato.

9. Sia $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$: un'eq. diff. del secondo ordine a coefficienti costanti completa.

Consideriamo l'eq. caratteristica $z^2 + 2z + 1 = 0$ associata all'eq. diff. omogenea $y'' + 2y' + y = 0$. Essa ha un'unica radice -1 con molteplicità 2. Quindi l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La funzione $6e^{-x}$ è soluzione dell'eq. differenziale omogenea associata; cerchiamo quindi una soluzione particolare dell'eq. completa della forma (ricordare che la radice -1 ha molteplicità 2)

$$\bar{y}(x) = ax^2 e^{-x},$$

con a da determinare imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione dell'eq. diff. completa data. Poiché

$$\bar{y}'(x) = 2ax e^{-x} - ax^2 e^{-x}$$

$$\bar{y}''(x) = 2ae^{-x} - 2axe^{-x} - 2axe^{-x} + ax^2 e^{-x}.$$

Risulta

$$\bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} = 6e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 2ae^{-x} - 4axe^{-x} + ax^2 e^{-x} + 2(2axe^{-x} - ax^2 e^{-x}) + ax^2 e^{-x} = 6e^{-x}$$

$\Leftrightarrow$

$$2ae^{-x} - 4ax^2e^{-x} + ax^2e^{-x} + 4ax^2e^{-x} - 2ax^2e^{-x} + ax^2e^{-x} = 6e^{-x}$$

$\Leftrightarrow 2a=6$, ossia $a=3$.

Pertanto l'integrale generale dell'eq. diff. $y''+2y'+y=6e^{-x}$ risulta

$$\underline{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 3x^2 e^{-x}}, \quad \underline{c_1, c_2 \in \mathbb{R}}.$$

Ora

$$y(x)e^x - ax^2 = c_1 + c_2 x + (3-a)x^2,$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y(x)e^x - ax^2] = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 0 \\ \underline{a = 3}, \end{cases}$$

e

$$y(x) = 4e^{-x} + 3x^2 e^{-x}.$$

Risulta $\underline{y(0) = 4}$. ■

10. Dobbiamo calcolare $\int_0^2 \frac{x^2-x+3}{x^2-2x+2} dx$. Si tratta dell'integrale

di una funzione razionale della forma $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ con $P_2(x), Q_2(x)$ due polinomi di grado 2. Poiché il numeratore e il denominatore hanno lo stesso grado possiamo effettuare la divisione tra i polinomi x^2-x+3 e x^2-2x+2 ottenendo

$$\frac{x^2-x+3}{x^2-2x+2} = 1 + \frac{x+1}{x^2-2x+2}.$$

(oss. che il denominatore non si annulla mai)

Risulta allora

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-x+3}{x^2-2x+2} dx &= \int \left(1 + \frac{x+1}{x^2-2x+2} \right) dx \\ &= x + \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2-2x+2} dx \end{aligned}$$

$$= x + \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 4}{x^2 - 2x + 2} dx$$

$$= x + \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx$$

$$= x + \frac{1}{2} \log(x^2 - 2x + 2) + 2 \operatorname{arctg}(x-1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\int_0^2 \frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 2x + 2} dx = \left[x + \frac{1}{2} \log(x^2 - 2x + 2) + 2 \operatorname{arctg}(x-1) \right]_0^2$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2} \log 2 + 2 \operatorname{arctg} 1 \right) - \left(\frac{1}{2} \log 2 + 2 \operatorname{arctg}(-1) \right)$$

$$= 2 + 4 \operatorname{arctg} 1 = 2 + \cancel{4} \cdot \frac{\pi}{\cancel{4}} = 2 + \pi.$$

Allora la parte intera del valore dell'integrale dato è $[2 + \pi] = \underline{\underline{5}}$.

