2021-06-21 Terzo appello - AM 1

1. **2021-06-01**

   Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali positivi tale che

   $$\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{4} \quad \forall n \geq 1$$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ Vera / Falsa

   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \frac{4}{3}$ Vera / Falsa

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}} = +\infty$ Vera / Falsa

   $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{a_n}$ è convergente. Vera / Falsa

2. **2021-06-02**

   Determinate $\alpha > 0$ tale che

   $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)^{-\frac{2}{\log x^\alpha}} = e.$$

   Allora si ha $\alpha =$ ___ .

3. **2021-06-03**

   Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1$, strettamente convessa tale che $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$.

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

   $\exists x_0 \in]0, 1[$ tale che $f(x_0) + x_0 - 2 = 0$ Vero / Falso

   $\exists x_0 \in]0, 1[$ tale che $f'(x_0) = 0$ Vero / Falso

$\exists x_0 \in]0,1[$ tale che $f'(x_0) = -1$

Vero
Falso

$\forall x \in [0,1]$ si ha $f'(x) \neq 0$

Vero
Falso

4. **2021-06-04**

   Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

   $$F(x) = \int_1^x \frac{\arctan t}{1+\sqrt{|t|}} dt.$$

   F si annulla in $x = 1$ e in $x = \overline{\quad}$.

   L'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa $x = 0$ è $y = ax + b$ con a

negativo
nullo
positivo

   e b

negativo
nullo
positivo

   .

   F ha un punto di minimo assoluto in $x = \overline{\quad}$.

   F

ha
non ha

   un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e

ha
non ha

   un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

5. **2021-06-05**

   Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

   $$f(x) = e^{x-1} + 2x$$

   e sia g la funzione inversa di f.

   Allora l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto di ascissa 3 è $ax + by + c = 0$ con $a = \overline{\quad}$, $b = \overline{\quad}$, $c = \overline{\quad}$.

6. **2021-06-06**

   Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

   $$f(x) = \frac{4}{\pi} \arctan\big((x^2-1)^3\big).$$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti due affermazioni se è vera o falsa.

La funzione f ha un punto di minimo locale e assoluto in $x = 0$.

Vero
Falso

f è strettamente crescente su $[0, +\infty[$.

Vero
Falso

Inoltre l'immagine di f è l'intervallo $[\ \_\_\ ,\ \_\_\ [$.

Infine sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{(x-1)^\alpha} dx$ è convergente. Allora $\sup E_\alpha = \_\_$.

7. **2021-06-07**

   Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

   $$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x > 0 \\ -x^2 + 2x + b & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   f è iniettiva per ogni $b \in [0, 1]$.

Vera
Falsa

   f è suriettiva per ogni $b \geq 1$

Vera
Falsa

   Per ogni b per cui f è biettiva si ha che f è continua

Vera
Falsa

   Per ogni b per cui f è biettiva si ha che f è derivabile

Vera
Falsa

8. **2021-06-08**

   Sia A l'insieme in $\mathbb{C}$ dato da

   $$A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\overline{z}^2 + i\,|z|) = 0, z\overline{z} = 2\}.$$

   Allora l'insieme A

è vuoto
è costituito da due punti
è costituito dai vertici di un quadrato
è costituito dai punti di una circonferenza di centro l'origine

9. **2021-06-09**

   Siano $a \in \mathbb{R}$ e $y(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$$

   tali che

$$\lim_{x \to +\infty} [y(x)e^x - ax^2] = 4.$$

   Allora si ha $a =$ ___ e $y(0) =$ ___.

10. **2021-06-10**

    La parte intera del valore dell'integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 2x + 2}\, dx$$

    è ___.