

1. Sia $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che $f'(0) = 1$.

• $\exists r > 0 : f'(x) > 0 \quad \forall x \in]-r, r[\cap]-1, 2[$ (F)

Infatti, basta prendere $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

allora $f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Quindi $f'(0) = 1$, ma in ogni intorno di 0 cadono infiniti punti in cui $f'(x) = -1$. Basta considerare $x_k = \frac{1}{2k\pi} \quad k \in \mathbb{N}_{>0}$.

• $\exists r > 0 : f(x) < f(0) \quad \forall x \in]-r, 0[\cap]-1, 2[$ (V).

Infatti, per ipotesi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1$; quindi

$\exists r > 0$ tale che

$$(*) \quad \frac{1}{2} < \frac{f(x) - f(0)}{x} < \frac{3}{2} \quad \forall x \in]-r, r[\cap]-1, 2[$$

In particolare, per $x \in]-r, 0[$ si ha

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$$

da cui $f(x) - f(0) < 0$, ossia $f(x) < f(0)$.

• $x = 0$ non è un pt. di estremo per f . (V).

Dal teorema di Fermat segue che condizione necessaria

affinché $x = 0 \in]-1, 2[$ sia pt. di estremo per una funzione derivabile in $[-1, 2]$ è che $f'(0) = 0$.

• $\exists x_0 \in]0, 2[: f(x_0) = \max_{[0, 2]} f$: (V).

Infatti, da $f'(0) = 1$ segue che $\exists r > 0 : f(x) > f(0) \quad \forall x \in]0, r[\cap]-1, 2[$ (vedi *). D'altra parte, poiché f è derivabile su $[-1, 2]$, lo

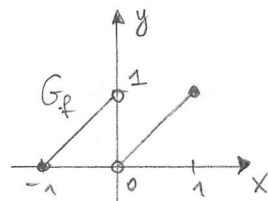
$\bar{e}$ in $[0,2]$, e quindi $\bar{e}$ continua in $[0,2]$. Per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo su $[0,2]$, in particolare, per quanto assertedo sopra $\exists x_0 \in]0,2]$ t.c. $f(x_0) = \max_{[0,2]} f$. ■

2. $A = [-1,1] \setminus \{0\}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{C}^1$.

• $f' > 0$ su $A \Rightarrow f$ $\bar{e}$ iniettiva su A : (F)

Infatti, basta prendere, per es.,

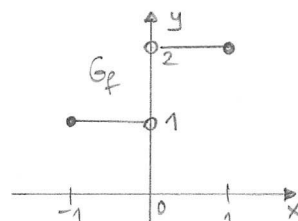
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{su } [-1,0[\\ x & \text{su }]0,1] \end{cases}$$



• $f' = 0$ su $A \Rightarrow f$ costante su A : (F)

Basta considerare, per es.,

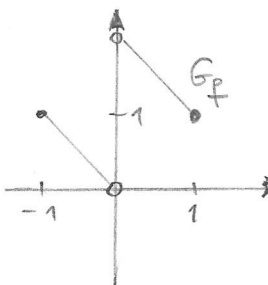
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{su } [-1,0[\\ 2 & \text{su }]0,1] \end{cases}$$



• $f' < 0$ su $A \Rightarrow x = -1$ $\bar{e}$ un pt. di massimo assoluto di f in A : (F)

Basta considerare, per es.,

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{su } [-1,0[\\ -x+2 & \text{su }]0,1] \end{cases}$$



• $f' < 0$ su $A \Rightarrow x = 1$ $\bar{e}$ l'unico pt. di minimo locale di f in A : (V)

$f' < 0$ su $A \Rightarrow f' < 0$ su $]0,1]$, quindi f $\bar{e}$ strett. decrescente in $]0,1]$; quindi $x = 1$ $\bar{e}$ pt. di minimo locale per f in A . Oss. che $f' < 0$ in $A \Rightarrow f' < 0$ in $[-1,0[$, quindi f $\bar{e}$ strett. decrescente in $[-1,0[$, ma non ha pt. di minimo locale in $[-1,0[$. Quindi $x = 1$ $\bar{e}$ l'unico pt. di minimo locale di f in A .

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \Rightarrow f$ può essere estesa con continuità in $x = 0$: (F)

Basta considerare, per es., $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } [-1,0[\\ 2 & \text{in }]0,1] \end{cases}$. ■

3. $f(x) = \sqrt[3]{x(|x|-1)} + 2$

- f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[-1, 1]$: (V)

f è continua su $[-1, 1]$, derivabile su $] -1, 1 [$

(prodotto, somma e composizione di funzioni continue su $[-1, 1]$ e derivabili su $] -1, 1 [$); inoltre $f(-1) = f(1) = \sqrt[3]{2}$.

- f è né dispari né pari.

- $$\int_{-1}^1 (f^3(x) - 2) dx = \int_{-1}^1 ([x(|x|-1) + 2] - 2) dx =$$
$$= \int_{-1}^1 [x(|x|-1)] dx = 0$$

funzione dispari su $[-1, 1]$.

- f ha in $x = -2$ un pt. con tangente verticale.

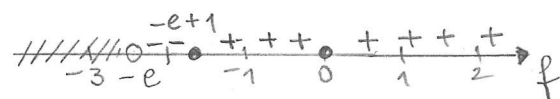
Infatti $\underbrace{x(|x|-1) + 2}_{\text{derivabile su } \mathbb{R}} = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 - x + 2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Ricordiamo che $g(t) = \sqrt[3]{t}$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ha in $t=0$ un pt.

con tangente verticale. Poiché $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)(x-1)} \sim \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{x+2}$

per $x \rightarrow -2$, risulta che f ha in $x = -2$ un pt. con tangente verticale. ■

4. $f(x) = x^2 \log(x+e)$ è definita su $]-e, +\infty[$.

Inoltre f è continua e derivabile su $]-e, +\infty[$. 

- In particolare, f è continua su $[-e+1, 0]$, derivabile su $] -e+1, 0 [$ e $f(-e+1) = f(0) = 0$. Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle. Poiché $f(x) > 0$ su $] -e+1, 0 [$ e $f(-e+1) = f(0) = 0$ possiamo asserire che $\exists x_0 \in] -e+1, 0 [$ t.c. $f'(x_0) = 0$ e x_0 è un pt. di massimo locale per f .

Per poter asserire che tale massimo locale è stretto per f studiamo il segno di $f'(x) = 2x \log(x+e) + \frac{x^2}{x+e}$, ossia di

$$f'(x) = x \left[2 \log(x+e) + \frac{x}{x+e} \right].$$

Si ha $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oppure $2 \log(x+e) = -1 + \frac{e}{x+e}$.

Oss. che $g(x) = 2 \log(x+e)$ è una funzione stretta, crescente su $]-e, +\infty[$

continua

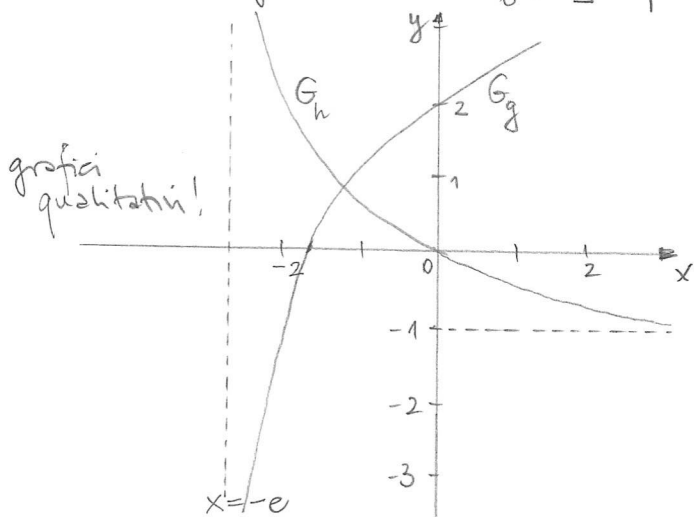
$$g(-e+1) = 0, \quad g(0) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -e^+} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

mentre $h(x) = -1 + \frac{e}{x+e}$ è una funzione stretta, decrescente su $]-e, +\infty[$

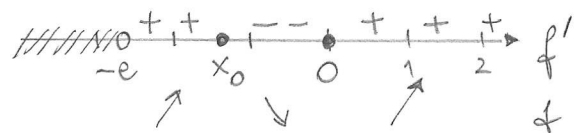
continua

$$h(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -e^+} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -1.$$

Segue che $\exists! x_0 \in]-e, 0[$ t.c. $g(x_0) = h(x_0)$, ossia $f'(x_0) = 0$.



Inoltre abbiamo subito il segno di f' :



Possiamo allora concludere che le prime due affermazioni del quesito 4 sono entrambe vere (V).

- Notiamo infine che $f \in C^2(]-e, +\infty[)$ e $f''(x) = 2 \log(x+e) + \frac{2x}{x+e} + \frac{2x(x+e) - x^2}{(x+e)^2}$,
ossia $f''(x) = 2 \log(x+e) + \frac{2x}{x+e} + \frac{x^2 + 2xe}{(x+e)^2} > 0$ su $[0, +\infty[$.
Quindi f è strettamente convessa su $[0, +\infty[$ (V).

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $y = x - 1$ è asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow -\infty$ e per $x \rightarrow +\infty$.

Possiamo scrivere che $f(x) = x - 1 + o(1)$ per $x \rightarrow -\infty$, per $x \rightarrow +\infty$.

- Risulta $\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$, $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$. Per il teorema dei valori intermedi (f è continua su un intervallo!), f assume tutti

i valori tra $\inf_{\mathbb{R}}$ e $\sup_{\mathbb{R}} f$. Possiamo concludere che l'affermazione $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ è (V). $\square$

• $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = x_0^3 - 2x_0^2 + 1$ (V) :

Perché $f(x) = x - 1 + o(1)$ per $x \rightarrow -\infty$, per $x \rightarrow +\infty$, $\exists M > 0$ t.c.

$$x - \frac{3}{2} < f(x) < x - \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |x| > M.$$

D'altra parte possiamo anche trovare $\bar{M} \geq M$ tale che

$$x - \frac{1}{2} < x^3 - 2x^2 + 1 \quad \forall x \geq \bar{M}$$

$$\text{e } x^3 - 2x^2 + 1 < x - \frac{3}{2} \quad \forall x \leq -\bar{M};$$

quindi $\exists$ ono $a < b$ t.c.

$$g(a) < f(a)$$

$$f(b) < g(b),$$

dove $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Poiché f e g sono continue su $[a, b]$, esiste $x_0 \in]a, b[$ t.c. $f(x_0) = g(x_0)$. $\square$

• $f(x) - x = o(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ (V)

Oss. che $\frac{f(x) - x}{x} = \frac{x - 1 + o(1) - x}{x} = \frac{-1 + o(1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Quindi

$$f(x) - x = o(x) \text{ per } x \rightarrow +\infty. \quad \square$$

• $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : -\varepsilon < f(x) - x + 1 < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, |x| > M$ (V).

Per ipotesi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x + 1) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1) = 0$.

Quindi, per definizione, $\forall \varepsilon > 0 \exists M_1 > 0$ t.c.

$$-\varepsilon < f(x) - x + 1 < \varepsilon \quad \forall x < -M_1$$

ed $\exists M_2 > 0$ t.c.

$$-\varepsilon < f(x) - x + 1 < \varepsilon \quad \forall x > M_2$$

Ponendo $M = \max\{M_1, M_2\}$ si ha che $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ t.c.

$$-\varepsilon < f(x) - x + 1 < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, x < -M \text{ o } x > M.$$

$$\Leftrightarrow |x| > M \quad \square$$

6. Calcoliamo $\int_{-2}^{\pi^2-2} \sqrt{x+2} \cos \sqrt{x+2} dx$ usando prima il metodo di sostituzione e poi l'integrazione per parti.

$$\int_{-2}^{\pi^2-2} \sqrt{x+2} \cos \sqrt{x+2} dx = \int_0^{\pi} 2t^2 \cos t dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 \cos t dt.$$

$\sqrt{x+2} = t$
 $x = t^2 - 2$
 $dx = 2t dt$

Ora $\int t^2 \cos t dt = t^2 \sin t - \int 2t \sin t dt$:

$$= t^2 \sin t - 2 \left[t(-\cos t) - \int (-\cos t) dt \right]$$

$$= t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \int \cos t dt$$

$$= t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t + C \quad C \in \mathbb{R};$$

abbiamo dunque

$$\int_0^{\pi} t^2 \cos t dt = \left[t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t \right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi \cos \pi = -2\pi.$$

Infine

$$\int_{-2}^{\pi^2-2} \sqrt{x+2} \cos \sqrt{x+2} dx = 2 \int_0^{\pi} t^2 \cos t dt = -4\pi.$$

Risulta $a\pi = -4\pi \Leftrightarrow \underline{\underline{a = -4.}}$

7. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^\alpha} \sqrt[4]{|1-x^2|^\alpha}} dx$: poniamo $f:]0, +\infty[\setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^\alpha} \sqrt[4]{|1-x^2|^\alpha}}$ continua, > 0 .

Abbiamo • per $x \rightarrow 0^+$ $f(x) \sim \frac{x^2}{x^{\alpha/2}} = \frac{1}{x^{\alpha/2-2}}$

• per $x \rightarrow 1$ $f(x) \sim \frac{\pi/4}{\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{|1-x|^\alpha}}$

• per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^{\alpha/2} \sqrt[4]{x^{2\alpha}}} = \frac{\pi/2}{x^{\alpha/2+\alpha/2}} = \frac{\pi/2}{x^\alpha}$

$$\text{Poiché } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}-2}} dx < +\infty \iff \frac{\alpha}{2} - 2 < 1$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt[4]{|1-x|^\alpha}} dx < +\infty \\ \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{|1-x|^\alpha}} dx < +\infty \end{aligned} \right\} \iff \frac{\alpha}{4} < 1$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha > 1,$$

per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio dato converge $\iff \alpha \in]1, 4[$, ossia nell'intervallo $]a, b[$ di estremi $a=1$ e $b=4$. 

8.
$$\begin{cases} |\bar{z} - 1| = z + i \\ w^3 = |z|^2 \end{cases}$$

Per risolvere la prima equazione del sistema poniamo $z = x + iy$, dove x e y sono la parte reale e la parte immaginaria di z , rispettivamente.

Poiché $|\bar{z} - 1| \in \mathbb{R}$, deve risultare $z + i \in \mathbb{R}$ ossia

$$x + (y+1)i \in \mathbb{R}$$

da cui segue subito $y+1=0$, ossia $y=-1$. Abbiamo dunque per Intanto $z = x - i$, e quindi $\bar{z} = x + i$.

La prima eq. del sistema risulta dunque

$$|(x-1) + i| = x$$

$$\text{ossia } \sqrt{(x-1)^2 + 1} = x.$$

$$\text{Abbiamo } \sqrt{(x-1)^2 + 1} = x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)^2 + 1 = x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ -2x + 2 = 0 \end{cases},$$

ossia $x=1$. L'unica soluzione della 1^a eq. del sistema risulta

dunque $z = 1 - i$. La seconda eq. si risolve allora

$$w^3 = 2,$$

da cui

$$w_0 = \sqrt[3]{2}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{2} e^{i \frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt[3]{2} e^{i \frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

• $S = \{(z, w_0), (z, w_1), (z, w_2)\}$: il numero di elementi di S è 3.

• per ogni soluzione $(z, w) \in S$ si ha $z = a + ib$ con $a = 1$ e $b = -1$ □

• esiste una soluzione $(z, w) \in S$ tale che $\operatorname{Im} w = 0$ (V) :
è la coppia (z, w_0) . □

• per la soluzione $(z, w) \in S$ nel secondo quadrante si ha $w = \sqrt[3]{r} e^{i \frac{2\pi}{k}}$
con $r = 2$ e $k = 3$. ■

9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6 \cos x - 3 \sin x - 6 \log[(1+x)^{\frac{1}{x}}]}{x^\alpha}$: per quale $\alpha > 0$ tale limite
 $\exists$ finito diverso da 0?

Oss. innanzitutto che $\log[(1+x)^{\frac{1}{x}}] =$

$$= \frac{1}{x} \log(1+x), \text{ e il limite si}$$

presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Possono usare gli sviluppi di Taylor delle funzioni $\cos x$, $\sin x$ e
 $\log(1+x)$ ottenendo così, per $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{6}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)$$

$$\frac{6 \cos x - 3 \sin x - \frac{6}{x} \log(1+x)}{x^\alpha} = \frac{6 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - 3 \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \frac{6}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)}{x^\alpha}$$

- 9 -

$$= \frac{\cancel{6} - 3x^2 + o(x^2) - \cancel{3x} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \cancel{6} + \cancel{3x} - 2x^2 + o(x^2)}{x^\alpha}$$
$$= \frac{-5x^2 + o(x^2)}{x^\alpha}.$$

Dunque il $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6 \cos x - 3 \sin x - 6 \log[(1+x)^{\frac{1}{2}x}]}{x^\alpha}$ esiste finito $\neq 0$

$\Leftrightarrow \underline{\alpha = 2}$ e per tale α il valore del limite è -5 . ■

10. Dobbiamo risolvere il pbm. di Cauchy
$$\begin{cases} y'' + 4y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

L'eq. caratteristica dell'eq. diff. omogenea $y'' + 4y = 0$ è $z^2 + 4 = 0$, le cui radici sono $z = \pm 2i$. Quindi l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea è $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare dell'eq. diff. completa è banalmente $\bar{y}(x) = \frac{1}{4}$. Quindi la soluzione generale dell'eq. diff. completa è

$$y(x) = \frac{1}{4} + c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si ha $y(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{4} + c_2$, da cui $c_2 = -\frac{1}{4}$.

Da $y'(x) = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$ e $y'(0) = -4$ segue

$$-4 = 2c_1 \quad \text{ovvero} \quad c_1 = -2.$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato è dunque

$$\underline{y(x) = \frac{1}{4} - 2 \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x} \quad \text{su } \mathbb{R}.$$

Si ha $\underline{y(\pi) = \frac{1}{4} - 2 \sin 2\pi - \frac{1}{4} \cos 2\pi = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.}$ ■