2021-07-12 Quarto appello - AM 1

1. **2021-07-01**

   Sia $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $f'(0) = 1$.

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   $\exists r > 0 : f'(x) > 0 \ \forall x \in \,]-r, r[\, \cap [-1, 2]$ Vero / Falso

   $\exists r > 0 : f(x) < f(0) \ \forall x \in \,]-r, 0[\, \cap [-1, 2]$ Vero / Falso

   $x = 0$ non è un punto di estremo per f Vero / Falso

   $\exists x_0 \in \,]0, 2] : f(x_0) = \max\limits_{[0,2]} f$ Vero / Falso

2. **2021-07-02**

   Sia $A = [-1, 1] \setminus \{0\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1$.

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   $f' > 0$ su $A \implies f$ è iniettiva su A Vero / Falso

   $f' = 0$ su $A \implies f$ è costante su A Vero / Falso

   $f' < 0$ su $A \implies x = -1$ è un punto di massimo assoluto di f in A Vero / Falso

   $f' < 0$ su $A \implies x = 1$ è l'unico punto di minimo locale di f in A Vero / Falso

   $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) \implies f$ può essere estesa con continuità in $x = 0$ Vero / Falso

3. **2021-07-03**

   Sia $f(x) = \sqrt[3]{x(|x|-1)+2}$.

   Allora

   f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[-1, 1]$.

Vero
Falso

   f è

dispari
pari
né dispari né pari

   Si ha $\displaystyle\int_{-1}^{1} (f^3(x) - 2)dx =$ ___.

   f ha in $x =$ ___ un punto con tangente verticale.

4. **2021-07-04**

   Sia $f(x) = x^2 \log(x + e)$.

   Stabilite per ciascuna delle seguenti tre affermazioni se è vera o falsa.

   f ammette un punto critico che è un punto di massimo locale stretto per f

Vera
Falsa

   f ammette un punto critico che è un punto di minimo locale stretto per f

Vera
Falsa

   f è strettamente convessa su $[0, +\infty[$.

Vera
Falsa

5. **2021-07-05**

   Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $y = x - 1$ è asintoto obliquo per f per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Vera
Falsa

$\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = x_0^3 - 2x_0^2 + 1$

Vera
Falsa

$f(x) - x = o(x)$ per $x \to +\infty$

Vera
Falsa

$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : -\varepsilon < f(x) - x + 1 < \varepsilon\ \forall x \in \mathbb{R}, |x| > M$

Vera
Falsa

6. **2021-07-06**

   Per $a =$ — si ha

$$\int_{-2}^{\pi^2-2} \sqrt{x+2}\ \cos\sqrt{x+2}\ dx = a\pi$$

7. **2021-07-07**

   L'insieme dei numeri reali positivi α per cui l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^\alpha}\sqrt[4]{|1-x^2|^\alpha}}\ dx$$

   risulta convergente è l'intervallo $]a, b[$ di estremi $a =$ — e $b =$ —.

8. **2021-07-08**

   Sia S l'insieme delle soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} |\overline{z} - 1| = z + i \\ w^3 = |z|^2 . \end{cases}$$

   Allora

   il numero di elementi di S è —;

   per ogni soluzione $(z, w) \in S$ si ha $z = a + bi$ con $a =$ — e $b =$ —;

   esiste una soluzione $(z, w) \in S$ tale che $\operatorname{Im} w = 0$

Vero
Falso

   per la soluzione $(z, w) \in S$ nel secondo quadrante si ha $w = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{2\pi}{k}}$ con $r =$ — e $k =$ —.

9. **2021-07-09**

   Sia α il numero reale positivo per cui esiste finito diverso da 0 il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{6\cos x - 3\sin x - 6\log[(1+x)^{\frac{1}{x}}]}{x^\alpha}.$$

   Allora si ha $\alpha = \_\_$ e per tale valore di α il limite vale $\_\_$.

10. **2021-07-10**

   Sia y la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

   Allora si ha $y(\pi) = \_\_$.