

$$1. \begin{cases} (z^2 + 4i)(\bar{w} + i) = 0 \\ w\bar{z} - i = 0 \end{cases}$$

Oss. che $(z^2 + 4i)(\bar{w} + i) = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4i$ o $\bar{w} = -i$
 $\Leftrightarrow z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{2}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
 oppure $w = i$.

Poiché le radici quadrate (complesse) di $4e^{-i\frac{\pi}{2}}$ risultano

$$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \\ = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

e

$$z_1 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \\ = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

dalla seconda equazione si ricavano

$$w_0 = \frac{i}{\bar{z}_0} = \frac{i z_0}{|z_0|^2} = \frac{i(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$w_1 = \frac{i}{\bar{z}_1} = \frac{i z_1}{|z_1|^2} = \frac{i(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

e quindi le coppie (z_0, w_0) e (z_1, w_1) .

Infine, inserendo $w = i$ nella seconda eq. del sistema si ottiene $i\bar{z} = i$ da cui $\bar{z} = 1$, e quindi $z = 1$.

Risulta

$$\bullet \underline{S = \{(z_0, w_0), (z_1, w_1), (z, w)\} =} \\ = \left\{ \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4} \right), \left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4} \right), (1, i) \right\} :$$

il numero di elementi di S è 3. □

• ogni soluzione $(z, w) \in S$ soddisfa $|\bar{w}z| = 1$ (V):

infatti, coniugando la 2^a eq. del sistema risulta $\bar{w}z + i = 0$,

ossia $\overline{W}Z = -i$, da cui $|\overline{W}Z| = |-i| = 1$. □

• esiste una soluzione $(z, w) \in S$ tale che $\operatorname{Re} w = 0$ (V) :

è la coppia $(1, i)$. □

$$\begin{aligned} & \bullet \sqrt{2} \left[\max \{ \operatorname{Re} z : z \text{ è sol. del sistema} \} - 4 \min \{ \operatorname{Im} w : w \text{ è sol. del sistema} \} \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\sqrt{2} - 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \sqrt{2} (2\sqrt{2}) = \underline{\underline{4}}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

$$2. \quad a_n = \frac{n^{n-1} + (n-2)^n}{e^n + 4n! + (n+2)^n} \quad n \geq 1.$$

Notiamo che sia il numeratore che il denominatore tendono a $+\infty$ per $n \rightarrow +\infty$. Raccogliamo dunque sia al numeratore che al denominatore il termine dominante n^n . Abbiamo dunque

$$a_n = \frac{n^n \left(\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \right)}{n^n \left(\frac{e^n}{n^n} + \frac{4n!}{n^n} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \right)} \quad n \geq 1.$$

Ricordando la gerarchia degli infiniti per le successioni, per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0,$$

e che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{e^{-2}}{e^2} = e^{-4}.$$

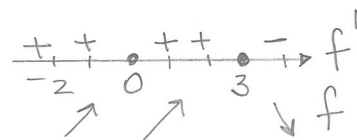
Infine, dalla continuità della funzione logaritmo segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log a_n = \log \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \log e^{-4} = \underline{\underline{-4}}. \quad \blacksquare$$

$$3. \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 e^{-x}).$$

$$f \text{ è derivabile e } f'(x) = \frac{1}{1 + (x^3 e^{-x})^2} \cdot [3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}]$$

$$= \frac{x^2 e^{-x} [3 - x]}{1 + (x^3 e^{-x})^2}$$



Ne segue subito:

- La funzione f ha un pti di massimo locale e assoluto in $x=3$ (V)
- la funzione f è iniettiva su $]-\infty, 3]$ (V):

infatti la funzione f è strettamente crescente su $]-\infty, 3]$.

- L'immagine di f è l'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (F):

L'immagine di f risulta essere $]-\frac{\pi}{2}, \arctan(\frac{27}{e^3})]$

(nota che $f(x) \downarrow$ su $[3, +\infty[$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$).

- Notiamo che $f(x) > 0$ su $]0, 1]$ continua; inoltre per $x \rightarrow 0^+$ $f(x) = \arctan(x^3 e^{-x}) \sim x^3$. Per il criterio del confronto asintotico l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[\alpha]{f(x)}} dx$ è convergente se e solo se $\int_0^1 \frac{1}{x^{3\frac{\alpha}{6}}} dx$ lo è.

$$\text{Ora } \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha/2}} dx < +\infty \iff \frac{\alpha}{2} < 1 \iff \alpha < 2.$$

Dunque $E_\alpha =]-\infty, 2[$ e $\sup E_\alpha = 2$. ■

4. Sia $f(x) = e^{|x^2+x|-x^2}$: funzione continua definita su tutto $\mathbb{R}$.

Possiamo scrivere

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2+x-x^2} = e^x & \text{se } x^2+x \geq 0 \\ e^{-x^2-x-x^2} = e^{-2x^2-x} & \text{se } x^2+x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^x & \text{se } x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[\\ e^{-2x^2-x} & \text{se } x \in]-1, 0[. \end{cases}$$

Notiamo che

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ (-4x-1)e^{-2x^2-x} & \text{se } x \in]-1, 0[. \end{cases}$$

Ora

- $f(x) = e^x$ su $]-\infty, -1]$: risulta che f è integrabile (in senso improprio) su $]-\infty, -1]$. Poiché f è Riemann-integrabile su $[-1, 0]$ essendo una funzione continua su $[-1, 0]$, risulta

infine che f è integrabile (in senso improprio) in $]-\infty, 0]$.

- Oss. che f è continua su tutto $\mathbb{R}$ e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. $\square$

Poiché $\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^x = e^{-1}$,
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-4x-1)e^{-2x^2-x} = 3e^{-1}$,

dal condansio di Lagrange (o del'Hôpital) si ha $f'_-(-1) = e^{-1}$ e $f'_+(-1) = 3e^{-1}$. Poiché $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$ risulta che f non è derivabile in $x = -1$. $\square$

- Analog. al pt. precedente abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = \underline{1}; \quad \underline{f'_-(0)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-4x-1)e^{-2x^2-x} = \underline{-1}.$$

- Poiché f è continua in $x=0$, $\exists$ sono finiti $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ ma $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, abbiamo che $(0, 1)$ è un pt. angoloso. $\blacksquare$

5. $\frac{\sin x}{x} - 1 = \frac{1}{x} (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) - 1$ per $x \rightarrow 0^+$

$$= \cancel{x} - \frac{x^2}{3!} + o(x^2) - \cancel{1} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \underline{\alpha=2}; \quad \square$$

• $(1+x)^{1/x} - e = e^{\frac{1}{x} \log(1+x)} - e$ per $x \rightarrow 0^+$

$$= e^{1-x+o(x)} - e$$

$$= e(e^{-x+o(x)} - 1) = -e \frac{x}{2} + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \underline{\alpha=1};$$

• $x^2 - \sinh x^2 = x^2 - (x^2 + \frac{(x^2)^3}{3!} + o(x^6))$ per $x \rightarrow 0^+$ $\square$

$$= -\frac{x^6}{3!} + o(x^6) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \underline{\alpha=6}; \quad \square$$

• $\frac{1}{\sinh x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sinh x}{x \sinh x} = \frac{x \frac{3}{3!} + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)}$ per $x \rightarrow 0^+$

$$\Rightarrow \underline{\alpha=1}. \quad \blacksquare$$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^{x^2} 3t^2 (1 + \frac{2}{\pi} \arctan t) dt}{(x^6)^{g(x)}} \cdot f(x)$

Notiamo subito che il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Siamo nelle ipotesi per poter applicare il teorema di de l'Hôpital; oss. che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(TFC)}}}{=} \frac{3(x^2)^2 \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan x^2\right) 2x}{6x^5} = \frac{\cancel{6x^5} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan x^2\right)}{\cancel{6x^5}}$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan x^2\right) = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 2,$

dal teorema di de l'Hôpital segue che $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale 2.

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x \sin|x|$

$$= \begin{cases} x \sin x & \text{se } x \geq 0 \\ -x \sin x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \sin h}{h} = 0$
 $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h \sin h}{h} = 0$

Quindi $f'_+(0) = f'_-(0)$; f risulta derivabile in $x=0$ e $f'(0)=0$.

(V) $\square$

- Abbiamo $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f'(x) = \begin{cases} \sin x + x \cos x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\sin x - x \cos x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x + x \cos x] = 0 = f'(0)$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [-\sin x - x \cos x] = 0 //$

la funzione $f'(x)$ è continua in $x=0$. (V) $\square$

- f è Riemann integrabile su ogni intervallo $[a,b]$ (V):
 infatti f è continua su ogni intervallo $[a,b]$ e quindi Riemann integrabile. $\square$

- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h + h \cos h}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - \frac{h^3}{3!} + o(h^3) + h \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h + o(h)}{h} = \underline{\underline{2}}$$

□

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sinh h - h \cosh h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h + \frac{h^3}{3!} - h + \frac{h^3}{2} + o(h^3)}{h} = \underline{\underline{-2}}. \end{aligned}$$

■

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\arcsin^2\left(\frac{1}{n}\right) \right] \frac{(3n)^2}{2^n} \quad \text{---} = a_n$$

Abbiamo $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$. Inoltre

$$a_n \sim \frac{1}{n^2} \cdot \frac{9n^2}{2^n} = \frac{9}{2^n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

($\arcsin x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$)

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ è una serie geometrica convergente, per il criterio del confronto asintotico (per serie a termini positivi!), anche la serie data è convergente.

□

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \frac{(n+2)!}{n^n} \quad \text{---} = a_n$$

Abbiamo $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$. Inoltre

$$a_n \sim \frac{1}{2n^2} \frac{(n+2)!}{n^n} = b_n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

($1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$).

Oss. ora che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)!}{2(n+1)^2 (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{2n^2 \cdot n^n}{(n+2)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)(n+2)!}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 (n+1)^n (n+1)} \cdot \frac{n^2 \cdot n^n}{(n+2)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Per il criterio del rapporto per serie a termini positivi, risulta che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente, e dunque, per il criterio del confronto asintotico, anche la serie data è convergente. ■

- 7 -

9. Dobbiamo calcolare $\int_{-1}^{+\infty} e^{1-\sqrt{|x|}} dx$.

Determiniamo innanzitutto la primitiva $\int e^{1-\sqrt{x}} dx = e \int e^{-\sqrt{x}} dx$.

Ora

$$\begin{aligned} \int e^{-\sqrt{x}} dx &= 2 \int t e^{-t} dt = 2 \left[-te^{-t} + \int e^{-t} dt \right] \\ \text{Integr. per sost.: } \sqrt{x} &= t \quad \text{Integr. per parti} \\ x &= t^2 \\ dx &= 2t dt \\ &= 2 \left[-te^{-t} - e^{-t} \right] + c \\ &= -2 e^{-\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1) + c \quad c \in \mathbb{R}. \\ &\quad \uparrow \\ &\quad t = \sqrt{x} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+\infty} e^{1-\sqrt{|x|}} dx &= \int_{-1}^1 e^{1-\sqrt{|x|}} dx + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M e^{1-\sqrt{x}} dx \\ &= 2 \int_0^1 e^{1-\sqrt{x}} dx + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M e^{1-\sqrt{x}} dx \\ &= 2 \left[-2 e^{1-\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1) \right]_0^1 + \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[-2 e^{1-\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1) \right]_1^M \\ &= 2 \left[-2 \cdot 2 + 2e \right] + \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[-2 e^{1-\sqrt{M}} (\sqrt{M} + 1) + 2 \cdot 2 \right] \\ &= -8 + 4e + 4 = \underline{\underline{-4 + 4e}}. \end{aligned}$$

Quindi $\int_{-1}^{+\infty} e^{1-\sqrt{|x|}} dx = A + Be$ con $A = -4$, $B = 4$.

10. Dobbiamo risolvere il pbm. di Cauchy $\begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = \sin x \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$

Cerchiamo innanzitutto l'integrale generale dell'eq. diff. lineare completa

$$y' = -\frac{1}{x} y + \sin x \quad \text{su }]0, +\infty[$$

(oss. che $\pi \in]0, +\infty[$)

con $a(x) = -\frac{1}{x}$ su $]0, +\infty[$ continua
 $b(x) = \sin x$ " " " " " "

Oss. che $A(x) = \int a(x) dx = -\int \frac{1}{x} dx = -\log x$, e la formula risolutiva

$$y(x) = e^{A(x)} \left(c + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right) \quad c \in \mathbb{R}$$

ci dà

$$y(x) = e^{-\log x} \left(c + \int \sin x e^{\log x} dx \right) \quad c \in \mathbb{R},$$

ossia

$$y(x) = \frac{1}{x} \left(c + \int x \sin x dx \right) \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ora } \int x \sin x dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integr. per parti}}}{=} -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c'$$

e quindi l'integrale generale dell'eq. diff. data è

$$y(x) = \frac{1}{x} [c - x \cos x + \sin x].$$

$$\text{Risulta } y(\pi) = 1 \iff 1 = \frac{1}{\pi} [c + \pi] \iff c = 0.$$

La soluzione del pbm. di Cauchy dato è dunque

$$\underline{y(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} \quad \text{su }]0, +\infty[.}$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} 3y(x) &= -3\cos x + 3\frac{\sin x}{x} \\ &= -3\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \frac{3}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \\ &= \cancel{-3} + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) + \cancel{3} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3y(x)}{x^2}$$

esiste finito e diverso da 0 se e solo se $\alpha = 2$ e per tale valore di α il limite vale 1.

