2021-09-06 Quinto appello - AM 1

1. **2021-09-06-01**

   Sia S l'insieme delle soluzioni complesse del sistema

   $$\begin{cases} (z^2+4i)(\overline{w}+i)=0 \\ w\overline{z}-i=0. \end{cases}$$

   Allora

   il numero di elementi di S è ___

   ogni soluzione $(z,w)\in S$ soddisfa $|\overline{w}z|=1$

Vero
Falso

   esiste una soluzione $(z,w)\in S$ tale che Re$w=0$

Vero
Falso

   $\sqrt{2}\big[\max\{\mathrm{Re}z : z \text{ è soluzione del sistema}\} - 4\min\{\mathrm{Im}w : w \text{ è soluzione del sistema}\}\big] =$ ___ .

2. **2021-09-06-02**

   Sia $(a_n)_n$ la successione di numeri reali positivi data da

   $$a_n = \frac{n^{n-1}+(n-2)^n}{e^n+4n!+(n+2)^n} \qquad n\geq 1.$$

   Allora si ha $\lim_{n\to+\infty} \log a_n =$ ___ .

3. **2021-09-06-03**

   Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

   $$f(x)=\arctan(x^3e^{-x}).$$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti tre affermazioni se è vera o falsa.

   La funzione f ha un punto di massimo locale e assoluto in $x=3$

Vera
Falsa

La funzione f è iniettiva su $]-\infty, 3]$

Vera
Falsa

L'immagine di f è l'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Vera
Falsa

Infine sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[6]{(f(x))^\alpha}} dx$ è convergente. Allora $\sup E_\alpha =$ ___.

4. **2021-09-06-04**

   Sia $f(x) = e^{|x^2+x|-x^2}$.

   Allora

   f

è
non è

   integrabile (in senso improprio) su $]-\infty, 0]$

   f non è derivabile in $x = 0$ e in $x =$ ___

   Si ha $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) =$ ___ e $f'_-(0) =$ ___

   $(0, 1)$ è

un punto angoloso
un punto con tangente verticale
una cuspide

   .

5. **2021-09-06-05**

   Le funzioni indicate sotto sono infinitesime per $x \to 0^+$. Determinate il loro ordine di infinitesimo rispetto all'infinitesimo campione x e indicatelo.

   $\dfrac{\sin x}{x} - 1 \qquad \alpha =$ ___

   $(1+x)^{\frac{1}{x}} - e \qquad \alpha =$ ___

   $x^2 - \sinh x^2 \qquad \alpha =$ ___

   $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \qquad \alpha =$ ___.

6. **2021-09-06-06**

   Il limite
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^6}\int_1^{x^2} 3t^2(1+\frac{2}{\pi}\arctan t)dt$$
   è uguale a ___.

7. **2021-09-06-07**

   Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da
   $$f(x) = x\sin|x|.$$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti tre affermazioni se è vera o falsa.

   Usando la definizione di derivata si verifica che f è derivabile in $x=0$ e $f'(0)=0$

Vera
Falsa

   La funzione f' è continua in $x=0$

Vera
Falsa

   f è Riemann integrabile su ogni intervallo $[a,b]$

Vera
Falsa

   Il limite del rapporto incrementale destro della funzione f' in 0 vale ___

   Il limite del rapporto incrementale sinistro della funzione f' in 0 vale ___.

8. **2021-09-06-08**

   Siano date le serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty}[\arcsin^2(\frac{1}{n})]\frac{(3n)^2}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})\frac{(n+2)!}{n^n}.$$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   La prima serie è convergente.

Vera
Falsa

La seconda serie è convergente.

Vera
Falsa

9. **2021-09-06-09**

   Si ha

   $$\int_{-1}^{+\infty} e^{1-\sqrt{|x|}}\, dx = A + Be$$

   dove $A = \overline{}$ e $B = \overline{}$.

10. **2021-09-06-10**

    Sia y la soluzione del problema di Cauchy

    $$\begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = \sin x \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$$

    Sia α il numero reale positivo per cui esiste finito e diverso da 0 il

    $$\lim_{x \to 0^+} \frac{3y(x)}{x^\alpha}.$$

    Allora si ha $\alpha = \overline{}$ e per tale valore di α il limite vale $\overline{}$.