

docente: Prof.ssa Anneliese Defranceschi
e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it
homepage: <http://latemar.science.unitn.it/defranceschi>

Periodo: Primo semestre 14/09/20 - 22/12/20

Le indicazioni dei capitoli e dei paragrafi si riferiscono al libro:

C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 1. Zanichelli, 2015.

Per alcuni argomenti non svolti nel volume indicato sopra, le indicazioni si riferiscono ai libri:

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 2. Zanichelli, 2010.

L'ordine di elencazione è tematica e non corrisponde necessariamente all'ordine con cui gli argomenti vengono svolti a lezione.

Elementi di teoria degli insiemi - Cap.1 Par. 1, 2, 3, 4, 5, 7

- 1: *Nozioni di logica matematica.* Proposizioni. Connettivi logici. Predicati. Quantificatori.
- 2: *Simboli e operazioni insiemistiche fondamentali.* Unione, intersezione, differenza e differenza simmetrica. Complementazione.
- 3: *Relazioni.* Prodotto cartesiano. Ordinamenti: definizioni di maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore.
- 4: *Funzioni.* Nozione intuitiva di funzione. Dominio, codominio, immagine. Funzioni particolari. Funzioni composte. Funzioni iniettive e suriettive. Funzioni inverse.
- 5: *Il principio di induzione.* Disuguaglianza di Bernoulli. Formula del binomio di Newton.

Insiemi numerici - Cap. 2 Par. 1, 2, 3, 4

- 1: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} . I numeri naturali, i numeri interi relativi e i numeri razionali. Struttura di \mathbb{Q} e rappresentazione dei numeri razionali.
- 2: *I numeri reali.* Ordinamento e struttura algebrica. Proprietà di completezza.
- 3: *Radicali, potenze e logaritmi.* Radici n -esime aritmetiche. Potenze con esponente reale e logaritmi. Disuguaglianza triangolare.
- 4: *I numeri complessi.* Operazioni e struttura di campo. Forma algebrica. Coniugato, modulo e argomento. Forma trigonometrica ed esponenziale. Potenze e radici.

L'operazione di limite - Cap. 4 Par. 1, 2, 3

- 1: *Funzioni reali di variabile reale.* Positività e simmetrie. Funzioni pari e dispari. Funzioni limitate. Estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo (assoluto/locale) di una funzione. Funzioni monotone. Esempi: potenze, esponenziali e logaritmi.
- 2: *Limiti di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} .* Definizione di limite. Proprietà vere definitivamente. Limiti destro e sinistro. Limiti e ordinamento. Teorema di permanenza del segno. Teorema del confronto (dei "due carabinieri"). Algebra dei limiti. Esempi di non esistenza del limite. Esistenza del limite di una funzione composta. Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone. Infinitesimi e infiniti. I simboli o e \sim loro relazioni. Confronti fra infinitesimi e infiniti. Asintoti.
- 3: *Successioni a valori in \mathbb{R} .* Limite di una successione. Esempi: successione geometrica. Relazione fra limite di successioni e limite di funzioni. Il numero e . Alcuni limiti notevoli. Esistenza del limite.

Funzioni continue - Cap. 5 Par. 1, 3

- 1: *Funzioni continue da \mathbb{R} in \mathbb{R} .* Definizione di continuità. Continuità di $f + g$, $f \cdot g$, $1/f$, $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$. Continuità delle funzioni composte. Punti di discontinuità. Teorema sulle possibili discontinuità di una funzione monotona.
Proprietà delle funzioni continue su un intervallo. Teorema della permanenza del segno. Teorema di esistenza degli zeri. Teorema dei valori intermedi. Teorema (di Weierstrass) di esistenza del massimo e del minimo di una funzione continua su un intervallo $[a, b]$.
Monotonia ed invertibilità. Continuità della funzione inversa di una funzione continua su un intervallo.
- 3: *Funzioni elementari.* Polinomi. Funzioni razionali, funzioni algebriche. Esponenziali e logaritmi. Funzioni iperboliche. Funzioni circolari (o trigonometriche) e loro inverse. Esponenziale complesso.

Calcolo differenziale 1. Funzioni reali di variabile reale - Cap. 6 Par. 1, 2, 3

- 1: *Derivata e differenziale.* Rapporto incrementale e suo significato geometrico. Definizione di derivata e di funzione derivabile. Retta tangente. Continuità delle funzioni derivabili. Esempi di funzioni continue e non derivabili. Punti angolosi, punti con tangente verticale e cuspidi. Derivate successive.
Algebra delle derivate. Derivata delle funzioni elementari. Derivata di funzione composta. Derivata di funzione inversa.
Il differenziale.
- 2: *I teoremi fondamentali del calcolo differenziale.* Punto critico. Il teorema di Fermat e gli estremi locali di una funzione. I teoremi di Rolle e di Cauchy. Il teorema di Lagrange. Conseguenze del teorema di Lagrange: test di monotonia, riconoscimento della natura dei punti stazionari. Il teorema di de l'Hôpital.
La formula di Taylor con il resto di Peano, di Lagrange e con resto in forma integrale. Sviluppi di Mac Laurin di alcune funzioni elementari.
- 3: *Applicazioni del calcolo differenziale.* Funzioni convesse e concave. Punto di flesso.
Determinazione del grafico di una funzione.
Applicazioni della formula di Taylor: determinazione della natura dei punti stazionari; calcolo di ordini di infinito o infinitesimo; calcolo del valore approssimato di una funzione e stima dell'errore.

Integrali di funzioni di una variabile. Serie numeriche - Cap. 8 Par. 1, 2, 3

- 1: *Integrale di Riemann.* Partizione di un intervallo, somme superiori, somme inferiori e definizione di integrale. Caratterizzazione dell'integrale e significato geometrico. Classi di funzioni integrabili. Teorema di integrabilità delle funzioni continue.
Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia, additività rispetto all'intervallo di integrazione. Teorema della media. Definizione di primitiva e proprietà. Primo teorema fondamentale del calcolo integrale (o teorema di Torricelli-Barrow): calcolo dell'integrale per variazione di una primitiva.
Funzione integrale. Secondo teorema (o Il teorema) fondamentale del calcolo integrale. Primitive e integrale indefinito. Tabella delle primitive.
Metodi di integrazione: integrazione per scomposizione, per parti e per sostituzione; integrazione di alcune funzioni razionali semplici.
- 2: *Serie numeriche.* Definizione di serie e di somma di una serie. Serie convergenti, divergenti e irregolari. Proprietà elementari. Esempi di serie convergenti e divergenti: serie geometrica, serie telescopica, serie armonica e serie armonica generalizzata. Condizione necessaria di convergenza di una serie.
Serie a termini non negativi. Criterio del rapporto e della radice n -esima. Criterio del confronto e del confronto asintotico.
Convergenza e convergenza assoluta.
Serie a segno alternato. Criterio di Leibniz di convergenza.
Serie di potenze. Serie di potenze e serie riconducibili a serie di potenze. Raggio di convergenza. Serie di Taylor.
- 3: *Estensioni dell'integrale di Riemann.* Integrali generalizzati (o impropri): integrazione su insiemi illimitati e integrazione di funzioni illimitate.
Criteri di convergenza. Criterio del confronto e del confronto asintotico.

Serie numeriche e integrali impropri.

Equazioni differenziali Gli argomenti di questo capitolo si possono trovare in molti testi. Per esempio in M. Bramanti, C. Pagani, S. Salsa. *Analisi Matematica 2*", Cap. 1.

- a) *Equazioni differenziali (di ordine n e) del primo ordine.* Definizione di soluzione. Problema di Cauchy. Integrale generale. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Integrale generale.
- b) *Equazioni lineari del secondo ordine.* Forma generale dellequazione e problema di Cauchy. Struttura dell'integrale generale nel caso di un'equazione omogenea o non omogenea. Equazioni omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti. Equazione caratteristica. Metodo della variazione delle costanti. Metodo di similarità.

Esercizi:

- Estremo superiore/inferiore di un sottoinsieme di \mathbb{R} e di funzioni a valori reali
- Iniettività/suriettività di funzioni di variabile reale. Funzione inversa e funzione composta
- Principio di induzione
- Numeri complessi: calcoli algebrici, risoluzione di equazioni in \mathbb{C} , radici n -esime e potenze. Rappresentazione grafica di semplici regioni del piano complesso individuate da equazioni o disequazioni
- Limiti di funzioni. Ordine di infinitesimo o di infinito. Comportamento asintotico
- Teorema degli zeri o del valor intermedio: esistenza di soluzioni di equazioni
- Continuità e derivabilità. Punti di non continuità e di non derivabilità. Derivate delle funzioni elementari. Equazione retta tangente/normale al grafico di una funzione in un punto del suo grafico
- Max/min di una funzione (uso del teorema di Fermat e i test di monotonia per trovare punti di massimo/minimo locale di una funzione e per determinarne la natura). Studio di funzioni o di una famiglia di funzioni di variabile reale dipendente da un parametro
- Studio del carattere di una serie (convergenza o non convergenza) usando i criteri di convergenza
- Limiti usando de l'Hôpital e gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari
- Integrali. Integrali definiti o primitive di funzioni elementari con l'uso, se necessarie, delle formule di integrazione per parti, per sostituzioni. Integrale di funzioni razionali semplici
- Area di semplici regioni piane
- Andamento e rappresentazione grafica di semplici funzioni integrali
- Integrali impropri. Studio della convergenza di un integrale improprio usando i criteri di convergenza
- Equazioni differenziali. Problema di Cauchy