

1. Vedi A3-21-06-AM1 Es. 1

2. " Es. 3

3. " Es. 4

4. " Es. 8

5. " Es. 9

6. Sia $f(x,y) = \frac{\log(4-x^2-y^2)}{\sqrt{|y|-x^2-1}}$. Allora l'insieme di definizione A

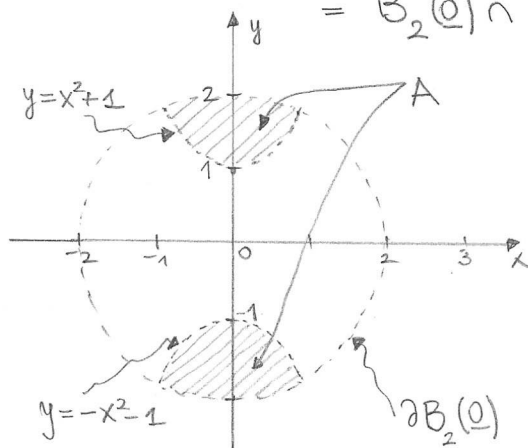
di f è costituito da tutte le coppie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 4-x^2-y^2 > 0 \\ |y|-x^2-1 > 0. \end{cases}$$

$$B_2(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}$$

Risulta $A = B_2(0) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > x^2+1\}$

$$= B_2(0) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2+1 \text{ o } y < -x^2-1\}$$



Oss. che $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(x^2+1)^2=4 \\ y=x^2+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4+3x^2-3=0 \\ y=x^2+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{-3+\sqrt{9+12}}{2} = \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \approx 0.8 \\ y=x^2+1 \end{cases} \Downarrow x \approx \pm 0.9$$

• Poiché $A \subseteq B_2(0)$, abbiamo che A è limitato (V)

$$\begin{aligned} A &= (B_2(0) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2+1\}) \cup (B_2(0) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x^2-1\}) \\ &= (B_2(0) \cap g_1^{-1}(]0, +\infty[)) \cup (B_2(0) \cap g_2^{-1}(]-\infty, 0[)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= y-x^2-1 \text{ funz. continua} \\ \Rightarrow g_1^{-1}(]0, +\infty[) &\text{ è aperto in } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(x,y) &= y+x^2+1 \text{ continua} \\ \Rightarrow g_2^{-1}(]-\infty, 0[) &\text{ è aperto in } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Poiché l'intersezione di un nr. finito di aperti è un insieme aperto
 si ha che $B_2(0) \cap g_1^{-1}(]0, +\infty[)$ e $B_2(0) \cap g_2^{-1}(]-\infty, 0[)$ sono insiemi
 aperti di $\mathbb{R}^2$, e con la loro unione.

Quindi l'affermazione " A è un insieme aperto in $\mathbb{R}^2$ " è (V).

- $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è connesso per poligonalità (V).
- $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è convesso (F): preso, per es., $\underline{x} = (0, 2) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$
 $\underline{y} = (0, 1) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$

il segmento congiungente $\underline{x}$ e $\underline{y}$ dato da

$$\begin{aligned} [\underline{x}, \underline{y}] &= \{(0, 1+t(2-1)) : t \in [0, 1]\} \\ &= \{(0, 1+t) : t \in [0, 1]\} \not\subset \mathbb{R}^2 \setminus A \end{aligned}$$

Tutti i pt. $(0, 1+t)$ per $t \in]0, 1[$ appartengono ad A .

Questi fatti si deducono immediatamente dalla rappresentazione
 grafica dell'insieme A , ma si verificano facilmente analitica-
 mente.

- A è convesso (F): basta prendere, per es. $\underline{x} = (0, \frac{3}{2}) \in A$
 $\underline{y} = (0, -\frac{3}{2}) \in A$

Ovviamente il segmento congiungente $\underline{x}$ e $\underline{y}$ non è contenuto
 in A ($(0, 0) \in [\underline{x}, \underline{y}]$, ma $(0, 0) \notin A$).

- $\bar{A} \setminus \{0\}$ è compatto (V): basta osservare che $\bar{A} \setminus \{0\} = \bar{A}$
 che è chiuso e limitato, e quindi per il teorema di Heine-Borel
 è un insieme compatto (seq.). ■

7. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x^2}{y^4 + x^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- f è continua in $(0, 0)$ (V): infatti $0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{|y| |\sin x^2|}{y^4 + x^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$

Ricordando che $|\sin t| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{|y| \cdot x^2}{y^4 + x^2} \leq |y| \quad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Per il teorema del confronto $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$, e quindi $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

• f è derivabile in $(0,0)$ (V): basta osservare che

$$f|_{x=0}(x,y) = f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

$$f|_{y=0}(x,y) = f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

• f è derivabile in $(0,0)$ lungo tutte le direzioni (V): sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^2, \|\underline{v}\|=1$;

sia $t \neq 0$; allora

$$\begin{aligned} \frac{f(0+t\underline{v}) - f(0)}{t} &= \frac{f(t\underline{v}) - f(0)}{t} = \frac{t v_2 \sin t^2 v_1^2}{t(t^4 v_2^4 + t^2 v_1^2)} \\ &= \frac{t v_2 (t^2 v_1^2 + o(t^2))}{t^3 (t^2 v_2^4 + v_1^2)}, \quad \text{per } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Risulta

$$D_{\underline{v}} f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t\underline{v}) - f(0)}{t} = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1 = 0 \\ v_2 & \text{se } v_1 \neq 0 \end{cases}$$

8. Sia $d \in \mathbb{R}$. Per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ (quindi $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, x+y^3 \rightarrow 0$)

$$x(1-e^{y^2}) - d \sin(x+y^3) = x(-y^2 - \frac{y^4}{2!} + o(y^4)) - d(x+y^3) + \frac{d}{3!}(x+y^3)^3 + o((x+y^3)^3)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0;$$

ossia

$$x(1-e^{y^2}) - d \sin(x+y^3) = -xy^2 - \frac{xy^4}{2!} + o(xy^4) - dX - dy^3 + \frac{d}{3!}(x+y^3)^3 + o((x+y^3)^3)$$

per $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

Risulta che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(1-e^{y^2}) - d \sin(x+y^3)}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

esiste solo se $d=0$ (se $d \neq 0$ risulta, per $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\frac{x(1-e^{y^2}) - d \sin(x+y^3)}{\sqrt{x^4+y^4}} = \underbrace{\frac{-dX + o(x^2+y^2)}{\sqrt{x^4+y^4}}}_{g(x,y)}.$$

$$\text{Ora } g(x,0) = -\frac{dX}{X^2} = -\frac{d}{X}, \text{ e } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} g(x,0)$$

e, per tale valore di d , il limite vale 0

$$0 \leq \frac{|xy^2|}{\sqrt{x^4+y^4}} \leq \frac{|x| \cdot \overbrace{y^2}^{\leq 1}}{\sqrt{x^4+y^4}} \leq |x| \quad \downarrow (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$0 \leq \frac{|xy^4|}{2! \sqrt{x^4+y^4}} \leq \frac{|x| \cdot \overbrace{y^2}^{\leq 1} \cdot \overbrace{y^2}^{\leq 1}}{2 \sqrt{x^4+y^4}} \leq \frac{|x|y^2}{2} \quad \downarrow (x,y) \rightarrow (0,0) \text{ e così via).}$$

9. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^2y + xy^2 - x + 3y$ è differenziabile;

$$h(t) = f(x(t), y(t)). \text{ Si ha inoltre } \begin{cases} x(0) = y(0) = 1 \\ (*) \quad \begin{cases} x'(0) = y'(0) = 0 \\ x''(0) = -1 \quad y''(0) = 2. \end{cases} \end{cases}$$

Poiché $\forall t \in \mathbb{R}$

$$h'(t) = f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t)$$

$$h''(t) = f_{xx}(x(t), y(t)) (x'(t))^2 + f_{yx}(x(t), y(t)) y'(t) x'(t) + f_x(x(t), y(t)) x''(t) +$$

$$+ f_{xy}(x(t), y(t)) x'(t) y'(t) + f_{yy}(x(t), y(t)) (y'(t))^2 + f_y(x(t), y(t)) y''(t)$$

si ha $h''(0) \stackrel{(*)}{=} \cancel{f_{xx}(1,1)} \cdot 0^2 + \cancel{f_{yx}(1,1)} \cdot 0 + f_x(1,1) (-1) +$
 $+ \cancel{f_{xy}(1,1)} \cdot 0 + \cancel{f_{yy}(1,1)} \cdot 0^2 + f_y(1,1) (2).$

Ora $f_x(x,y) = 2xy + y^2 - 1$, e quindi $f_x(1,1) = 2$

$f_y(x,y) = x^2 + 2xy + 3$, e quindi $f_y(1,1) = 6$;

pertanto

$$\underline{h''(0)} = -f_x(1,1) + 2f_y(1,1) = -2 + 12 = \underline{10}.$$

10. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \int_x^{y-z} e^{-s^2} ds \quad : \quad f \text{ differenziabile in } \mathbb{R}^3.$$

$$\underline{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \underline{r}(t) = (t, 2t+1, -3t+1): \quad \underline{r} \text{ derivabile in } \mathbb{R}.$$

Abbiamo $(f \circ \underline{r})'(t) = \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e, in particolare,

$$(f \circ \underline{r})'(0) = \langle \nabla f(\underline{r}(0)), \underline{r}'(0) \rangle.$$

Ora

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) \\ &= (-e^{-x^2}, e^{-(y-z)^2}, -e^{-(y-z)^2}) \end{aligned}$$

$$\underline{r}(0) = (0, 1, 1)$$

$$\underline{r}'(t) = (1, 2, -3) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{e quindi } \underline{r}'(0) = (1, 2, -3).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \underline{(f \circ \underline{r})'(0)} &= \langle (-e^0, e^0, -e^0), (1, 2, -3) \rangle \\ &= \langle (-1, 1, -1), (1, 2, -3) \rangle = -1 + 2 + 3 = \underline{4}. \end{aligned}$$

11. $\sqrt[3]{x}$ è uniformemente continua su $]0,1]$ (V)

(poiché $\sqrt[3]{x}$ è una funzione continua su $[0,1]$, per il teorema di Heine-Cantor essa è uniformemente continua su $[0,1]$; in particolare su $]0,1]$).

$\log x^2$ è uniformemente continua su $]0,1]$ (F)

(poiché $\log x^2$ è illimitata sull'insieme limitato $]0,1]$)

$\frac{\sin x}{x}$ è uniformemente continua su $]0,1]$ (V).

(possiamo considerare la funzione $\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{su }]0,1] \\ 1 & \text{se } x=0. \end{cases}$

$\bar{f}(x)$ è continua su $[0,1]$ e per il teorema di Heine-Cantor è uniformemente continua su $[0,1]$; in particolare $\bar{f}|_{[0,1]}$ è uniformemente continua; quindi $\frac{\sin x}{x}$ è uniformemente continua su $]0,1[$).

12. Sia $\vartheta \in]-\pi, \pi[$ il nr. per cui la direzione $\underline{v} = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ è quella lungo cui è massima la crescita della funzione

$$f(x,y) = (x^2+y) \log(y-x)$$

nel pt. $(0,1)$. f è differenziabile in $(0,1)$!

Sappiamo che deve essere $\underline{v} = \frac{\nabla f(0,1)}{\|\nabla f(0,1)\|}$.

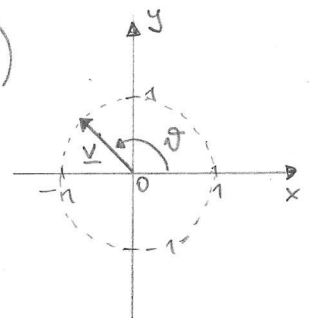
$$\text{Ora } \nabla f(x,y) = \left(2x \log(y-x) + (x^2+y) \cdot \frac{-1}{y-x}, \log(y-x) + (x^2+y) \cdot \frac{1}{y-x} \right)$$

$\forall (x,y) \in \text{dom } f$. Risulta

$$\nabla f(0,1) = (-1, 1) \text{ e quindi } \underline{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\text{Risulta } \underline{\vartheta} = \frac{3\pi}{4}.$$

Risposta: (C).



13. Sia $f(x,y) = \frac{\log(y-x^2)}{2y-3x}$. f è differenziabile in $(1,2)$.

L'eq. del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,2, f(1,2))$ è

$$z = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2).$$

$$\text{Ora } f_x(x,y) = \frac{\frac{-2x}{y-x^2}(2y-3x) - [\log(y-x^2)](-3)}{(2y-3x)^2} \text{ e quindi } f_x(1,2) = -2$$

$$f_y(x,y) = \frac{\frac{1}{y-x^2}(2y-3x) - [\log(y-x^2)] \cdot 2}{(2y-3x)^2} \text{ e quindi } f_y(1,2) = 1.$$

Risulta

$$\begin{aligned} z &= 0 - 2(x-1) + 1(y-2) \\ &= -2x + y. \end{aligned}$$

Quindi l'eq. del piano tangente al grafico di f nel pt. $(1, 2, f(1, 2))$ è

$$z = ax + by + c$$

con $a = -2$, $b = 1$, $c = 0$. □

L'eq. parametrica della retta normale al piano tangente al grafico di f nel pt. $(1, 2, f(1, 2))$ è

$$\begin{aligned} \underline{x} &= (1, 2, f(1, 2)) + s(\nabla f(1, 2), -1) & \underline{n} &= (\nabla f(1, 2), -1) \\ & & &= (-2, 1, -1) \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = 2 + s \\ z = 0 - s \end{cases}$$

Quindi
risulta

$$\begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = a + bs \\ z = c + ds \end{cases} \quad \text{con} \quad \underline{a = -2}, \underline{b = 1}, \underline{c = 0}, \underline{d = -1}. \quad \blacksquare$$

14. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. L'esistenza di due nr. positivi c ed r taliche

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| \leq c \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \quad \forall \underline{x} \in B_r(\underline{x}_0)$$

è

• condizione sufficiente per la continuità di f in $\underline{x}_0$ (V)

(infatti, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, \underline{x}_0) > 0$ t.c. $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$

$$\Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| < \varepsilon$$

fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{c}, r\}$.)

• condizione necessaria affinché $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$ (F)

(basta prendere $n=1, f(x) = \sqrt{|x|}$ su $\mathbb{R}, x_0 = 0$).

• condizione sufficiente affinché f risulti derivabile in $\underline{x}_0$. (F)

(basta prendere $n=1$, $f(x)=|x|$ su $\mathbb{R}$, $x_0=0$).

- garantisce l'esistenza del massimo e del minimo di f su $B_r(x_0)$ (F)

($f(x)=|x|$ su $]-r, r[$ ammette minimo, ma non massimo) ■

15. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = (x-y)^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 - 2xy + 2y^2$; f diff. su $\mathbb{R}^2$.

Abbiamo $\nabla f(x,y) = (4x - 2y, -2x + 4y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Risulta

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Quindi il pt. $(0,0)$ è un pt. critico per f . La matrice hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e quindi in particolare

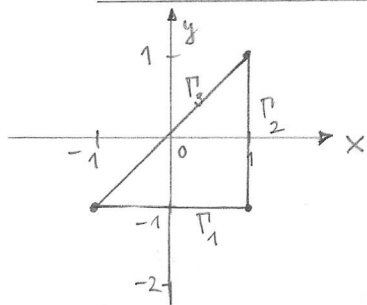
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Perché $\det(4) = 4 > 0$

$$\det H_f(0,0) = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 12 > 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ è un pt. di minimo locale per f su $\mathbb{R}^2$. (*)

□



Oss. che f è una funzione continua su un compatto (T è chiuso e limitato!): per il teorema di Weierstrass assume massimo e minimo su T .

Poiché $\nexists$ pt. critici in $\overset{\circ}{T}$, il massimo e il

minimo di f saranno assunti sul bordo di T : $\partial T = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Abbiamo $f|_{\Gamma_1}(x,y) = f(x, -1) \quad x \in [-1, 1]$

$$= 2x^2 + 2x + 2 =: \tilde{f}(x)$$

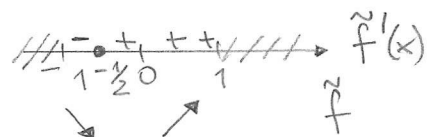
$$\tilde{f}'(x) = 4x + 2$$

$$\tilde{f}'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f(-1, -1) = 2$$

$$f(-\frac{1}{2}, -1) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$f(1, -1) = 6$$



(*) Notiamo che $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$! Risulta facilmente che $(0,0)$ pt. di min. assoluto per f !

Abbiamo $f|_{\Gamma_2}(x,y) = f(1,y) \quad y \in [-1,1]$
 $= 2 - 2y + 2y^2 \doteq \hat{f}(y)$

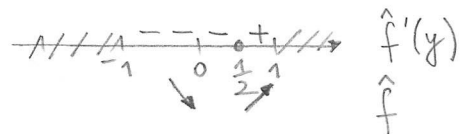
$$\hat{f}'(y) = -2 + 4y$$

$$\hat{f}'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$f(1,-1) = 6$$

$$f(1, \frac{1}{2}) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(1,1) = 2.$$



Infine $f|_{\Gamma_3}(x,y) = f(x,x) \quad x \in [-1,1]$
 $= 2x^2$

$$f(-1,-1) = f(1,1) = 2$$

$$f(0,0) = 0.$$

Allora si ha $\underline{\underline{\min_T f = 0}}, \quad \underline{\underline{\max_T f = 6.}}$