

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
 CdL in Matematica
 SECONDO APPELLO DI ANALISI MATEMATICA A
 a.a. 2020/21 - Trento, 12 luglio 2021

1. Vedi A4_12_07 Es. 1

2. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2) = (e^{x_1}, -x_2 + x_1 e^{x_1})$.

Oss. che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, poiché ogni componente di f è $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Inoltre

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 \\ e^{x_1} + x_1 e^{x_1} & -1 \end{pmatrix};$$

risulta che $\det J_f(x_1, x_2) = -e^{x_1} \neq 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Risulta che

f è un diffeomorfismo locale in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.

Notiamo che $f(0, 1) = (1, -1)$. Risulta dunque

$$\begin{aligned} J_{f^{-1}}(1, -1) &= [J_f(0, 1)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

quindi $a=1$, $b=0$, $c=1$, $d=-1$.

3. $\rho: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la curva polare data dall'eq.

$$\rho(\theta) = 1 + \sin \theta.$$

Osserviamo che una rappresentazione parametrica di tale curva è

$$\underline{r}(\theta) = ((1 + \sin \theta) \cos \theta, (1 + \sin \theta) \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Risulta che

$$\underline{r}'(\theta) = (\cos^2 \theta - (1 + \sin \theta) \sin \theta, \cos \theta \sin \theta + (1 + \sin \theta) \cos \theta).$$

$$\text{Allora } \underline{r}'(\theta) = (0, 0) \iff \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin \theta - \sin^2 \theta = 0 \\ \cos \theta (2 \sin \theta + 1) = 0. \end{cases}$$

Dalla 2ª eq. ricaviamo $\cos \theta = 0$ oppure $\sin \theta = -\frac{1}{2}$.

Se $\cos \theta = 0$, la 1ª eq. risulta $\sin \theta + \sin^2 \theta = 0$ *; segue $\theta = \frac{3}{2}\pi$.

Se $\sin \theta = -\frac{1}{2}$, la 1ª eq. risulta $\cos^2 \theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$ impossibile!

Quindi $\underline{r}$ è singolare $\iff \underline{\frac{2\theta}{\pi}} = 3$.

* se $\cos \theta = 0$, si ha $\sin \theta \neq 0$.

4. $\frac{x^2-1}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$

è una funzione continua su $[1, +\infty[$.

Poiché $y = \frac{x}{2}$ è un asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$, risulta che f è uniformemente continua su $[1, +\infty[$.

Si

• $\frac{\sin x}{x}$

è una funzione continua su $[1, +\infty[$. Inoltre $y=0$ è un asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$;

(ricordate che $0 \leq |f(x)| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$ per $x \geq 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$) quindi f è uniformemente continua su $[1, +\infty[$.

Si

• $x^2 - x$

è continua su $[1, +\infty[$, ma non è uniformemente continua su $[1, +\infty[$. Basta oss. che $x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ su $[1, +\infty[$ (vedi Nota 10 Lez (2) - 25-03, dove si è provato che $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su $[1, +\infty[$).

No

• $\cos x$

è continua su $[1, +\infty[$ e vale $|(\cos x)'| = |\sin x| \leq 1$ su $[1, +\infty[$

Quindi $\cos x$ risulta essere una funzione lipschitziana su $[1, +\infty[$ (anzi su $\mathbb{R}$), e quindi uniform. continua su $[1, +\infty[$.

Si

5. $\underline{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \underline{r}(t) = (t + \sin t + 2 \cos t, t^4 - t + 1)$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $\nabla f(2, 1) = (-2, 1)$.

oss. che $(f \circ \underline{r})'(t) = \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e

in particolare

$$(f \circ \underline{r})'(0) = \langle \nabla f(\underline{r}(0)), \underline{r}'(0) \rangle.$$

Ora $\underline{r}(0) = (2, 1)$. Inoltre $\underline{r}'(t) = (1 + \cos t - 2 \sin t, 4t^3 - 1)$,

per cui $\underline{r}'(0) = (2, -1)$. Ne segue che

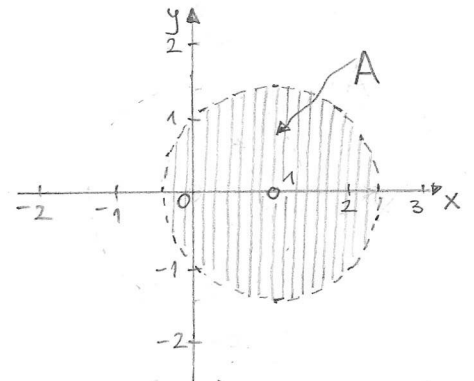
$$\underline{(f \circ \underline{r})'(0)} = \langle (-2, 1), (2, -1) \rangle = -4 - 1 = \underline{-5}.$$

6. A l'insieme di definizione di $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-|x^2-2x+y^2|}}$.

Allora $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - |x^2 - 2x + y^2| > 0\}$
 $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 - 2x + y^2| < 1\}$
 $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 - 2x + y^2 < 1\}.$

On $-1 < x^2 - 2x + y^2 \iff 0 < x^2 - 2x + 1 + y^2$
 $\iff 0 < (x-1)^2 + y^2$
 $x^2 - 2x + y^2 < 1 \iff (x-1)^2 - 1 + y^2 < 1$
 $\iff (x-1)^2 + y^2 < 2.$

Dunque $\underline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x-1)^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2 < 2\}$
 $= \underline{B_{\sqrt{2}}(1,0) \setminus \{(1,0)\}}.$



• L'insieme A è aperto e connesso per poligoni

(V)

• L'insieme A è connesso (F)

Infatti, preso per es., i pt. $\underline{x}_1 = (0,0)$ e $\underline{x}_2 = (2,0)$ il segmento $[\underline{x}_1, \underline{x}_2] \not\subset A$, poiché $(1,0) \in [\underline{x}_1, \underline{x}_2]$ e $(1,0) \notin A$. $\square$

• $\bar{A} = \bar{B}_{\sqrt{2}}(1,0)$ (V)

• $\partial A = \partial B_{\sqrt{2}}(1,0)$ (F)

Infatti $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 2\} \cup \{(1,0)\}$
 $= \partial B_{\sqrt{2}}(1,0) \cup \{(1,0)\}.$ $\square$

• $(1,0)$ è un pt. di accumulazione per A (V)

Infatti, $\forall r > 0, (B_r(1,0) \cap A) \setminus \{(1,0)\} \neq \emptyset$ $\square$

• I punti di minimo di f sono i pt. di $\partial B_1(1,0)$ (V)

Infatti, i punti di minimo di f su A sono i pt. in cui $\sqrt{1-|x^2-2x+y^2|}$ assume il valore massimo, cioè

i punti per cui $|x^2 - 2x + y^2| = 0$, ossia $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

$$\text{Ora } x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

$$\text{cioè } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 = 0\} = \partial B_1(1,0).$$

□

7. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2} - 1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

• f è continua in $(0,0)$ (V)

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|e^{xy^2} - 1|}{x^2 + y^2} = \left| \frac{e^{xy^2} - 1}{xy^2} \right| \cdot \frac{|xy^2|}{x^2 + y^2} \leq |x| \cdot \frac{|y^2|}{x^2 + y^2} \leq |x|$$

$\downarrow (x,y) \rightarrow (0,0)$ $\downarrow (x,y) \rightarrow (0,0)$ $\downarrow (x,y) \rightarrow (0,0)$
 1 0 0

$$\text{Quindi } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

□

• f è derivabile in $(0,0)$ (V)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(0,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

□

• f è derivabile in $(0,0)$ lungo tutte le direzioni (V)

Sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\underline{v}\| = 1$, $t \neq 0$. Allora

$$\frac{f(\underline{0} + t\underline{v}) - f(\underline{0})}{t} = \frac{f(t\underline{v})}{t} = \frac{e^{t^3 v_1 v_2^2} - 1}{t(t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2)} = \frac{e^{t^3 v_1 v_2^2} - 1}{t^3}$$

Ora se $v_1 = 0$ oppure $v_2 = 0$ sappiamo già che f è derivabile in $\underline{0}$. Se $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$ allora

$$\frac{e^{t^3 v_1 v_2^2} - 1}{t^3} = \left(\frac{e^{t^3 v_1 v_2^2} - 1}{t^3 v_1 v_2^2} \right) \cdot v_1 v_2^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \cdot v_1 v_2^2.$$

In definitiva, $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\underline{v}\| = 1$ si ha

$$\underline{D}_{\underline{v}} f(\underline{0}) = v_1 v_2^2.$$

■

8. Sia $\mathcal{C}$ la curva di eq.

$$g(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y - 1 = 0.$$

- L'eq. della retta tangente a $\mathcal{C}$ in un suo punto (x_0, y_0) in cui ∇g non si annulla è data da

$$g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Il punto $P_0 = (0, 1)$ sta su $\mathcal{C}$ poiché $g(0, 1) = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$.

Inoltre

$$g_x(x,y) = 4x^3 + 2xy$$

$$g_x(0,1) = 0$$

$$g_y(x,y) = 4y^3 + 2x^2$$

$$g_y(0,1) = 4.$$

Allora l'eq. della retta tangente in $(0, 1)$ è

$$0 \cdot (x - 0) + 4(y - 1) = 0,$$

cioè $y = 1$. Quindi l'eq. della retta tg alla curva in P_0 è

$$ax + by - 1 = 0 \quad \text{con} \quad \underline{a = 0} \quad \text{e} \quad \underline{b = 1}.$$

□

- Oss. che $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Vorremmo applicare il teorema della funzione implicita relativamente al punto $(0, 1)$. Abbiamo $g_y(0, 1) = 4 \neq 0$. Allora l'eq. $g(x, y) = 0$ definisce in un intorno del pt. $(0, 1)$ la funzione implicita $y = \varphi(x)$: esiste un intorno U di 0 e $\varphi: U \rightarrow V$ (V intorno di 1) tale che $g(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U$. Inoltre $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ (poiché $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$).

Abbiamo quindi

$$x^4 + \varphi^4(x) + 2x^2\varphi(x) - 1 = 0 \quad \forall x \in U \quad \text{e}$$

derivando rispetto a x risulta

$$(*) \quad 4x^3 + 4\varphi^3(x)\varphi'(x) + 4x^2\varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in U.$$

Per $x_0 = 0$ si ottiene, tenendo conto che $\varphi(0) = 1$,

$$4\varphi'(0) = 0.$$

Possiamo allora asserire che la funzione φ ha un pt. critico in $x_0 = 0$ (V).

Derivando (*) ulteriormente rispetto a x si ottiene $\forall x \in U$

$$12x^2 + 12\varphi^2(x)(\varphi'(x))^2 + 4\varphi^3(x)\varphi''(x) + 4\varphi(x) + 4x\varphi'(x) + 4x\varphi'(x) + 2x^2\varphi''(x) = 0.$$

Calcolando in $x_0=0$, tenendo conto che $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=0$ si ottiene

$$4\varphi''(0) + 4 = 0, \text{ cioè } \varphi''(0) = -1,$$

dunque $x_0=0$ è un pt. di massimo locale stretto per φ .

Allora l'affermazione che la funzione φ ha un pt. di minimo stretto in $x_0=0$ è (F). □

- Il polinomio di Taylor di ordine 2 di φ in $x_0=0$ è

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 \\ &= 1 + 0 \cdot x - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Quindi $P_2(x) = a + bx + \frac{c}{2}x^2$ con $a=1$, $b=0$, $c=-1$.

9. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = e^{y-x}(y^2 - 2x^2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ (anzi $\mathcal{C}^\infty$) □

- I punti di estremo (locali e globali) sono punti critici.

$$\begin{aligned} \text{Abbiamo che } \nabla f(x,y) &= (-e^{y-x}(y^2 - 2x^2) + e^{y-x}(-4x), \\ &\quad e^{y-x}(y^2 - 2x^2) + e^{y-x} \cdot 2y) \\ &= e^{y-x}(2x^2 - 4x - y^2, -2x^2 + 2y + y^2) \end{aligned}$$

$$\text{Allora } \nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x - y^2 = 0 \\ -2x^2 + 2y + y^2 = 0, \end{cases}$$

cioè (sommando le due equazioni)

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x^2 - 4x - y^2 = 0, \end{cases}$$

da cui si ottengono i pt. critici $(0,0)$ e $(-2,-4)$. □

- Per determinare la natura dei punti critici studiamo la matrice hessiana $H_f(x,y)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -e^{y-x}(2x^2-4x-y^2) + e^{y-x}(4x-4) \\ &= e^{y-x}(-2x^2+8x+y^2-4) \end{aligned}$$

$$f_{xy}(x,y) = e^{y-x}(2x^2-4x-y^2) + e^{y-x}(-2y)$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{y-x}(-2x^2+2y+y^2) + e^{y-x}(2+2y)$$

quindi

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{y-x}(-2x^2+8x+y^2-4) & e^{y-x}(2x^2-4x-y^2-2y) \\ e^{y-x}(2x^2-4x-y^2-2y) & e^{y-x}(-2x^2+4y+y^2+2) \end{pmatrix}$$

e dunque

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(-2,-4) = \begin{pmatrix} -12e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -6e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det H_f(0,0) = -8 < 0$ risulta che $\underline{P_1 = (0,0)}$ è un pt. di sella.

Oss. che $f_{xx}(-2,-4) = -12e^{-2} < 0$ e $\det H_f(-2,-4) = (72-64)e^{-4} > 0$;
quindi $\underline{(-2,-4)}$ è un pt. di massimo locale stretto per f .

• Infine f ammette massimo assoluto in $\mathbb{R}^2$ (F)

Basta oss. che $f(0,y) = y^2 e^y \rightarrow +\infty$ per $y \rightarrow +\infty$. □

• f ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$ (F).

Basta oss. che $f(x,x) = -x^2 \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

10. $f(x,y) = 4xy$; $\mathcal{C}$ la curva data dall'eq. $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$. ■

Oss. che $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ è un insieme chiuso, poiché

$\mathcal{C} = g^{-1}(\{0\})$ (g è continua e $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$). Inoltre $\mathcal{C}$ è

un insieme limitato: da $|xy| \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ segue

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq x^2+xy+y^2 \leq \frac{3}{2}(x^2+y^2) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Quindi $\mathcal{C} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq 3\} = \overline{B}_{\sqrt{6}}(0)$. Gli estremi

assoluti di f su $\mathcal{C}$ esistono dunque per il teorema di Weierstrass.

- Oss. che $\nabla g(x,y) = (2x+y, x+2y) = \underline{0} \iff (x,y) = (0,0)$.

Poiché $(0,0) \notin \mathcal{C}$, possiamo asserire che tutti i pt. di $\mathcal{C}$ sono pt. regolari. Possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange alla determinazione dei pt. stazionari di $f(x,y) = 4xy$ su $\mathcal{C}$. Ri-chiediamo direttamente che

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0. \quad \text{oss. che } \det \begin{pmatrix} 4y & 2x+y \\ 4x & x+2y \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff y(x+2y) - x(2x+y) = 0$$

$$\iff y^2 - x^2 = 0$$

$$\iff |y| = |x|.$$

Dall'eq. del vincolo $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ si ottiene allora nel caso

$y = x$ i pt. $(1,1)$ e $(-1,-1)$; nel caso

$y = -x$ i pt. $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Allora si ha $\min_{\mathcal{C}} f = -12$ e $\max_{\mathcal{C}} f = 4$.

I pt. di massimo sono $(1,1)$ e $(-1,-1)$. ■

11. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $(0,0)$.

Stabilite per ciascuna delle seg. affermazioni se segue dalle ipotesi.

- f è continua in $(0,0)$ (No)

$$\text{Basta prendere } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Allora } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0 = f(0,0)$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(0,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$$

$$\text{ma } \forall x \neq 0 \quad f(x,x) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq f(0,0). \quad \square$$

(*) Si può anche prendere banalmente $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \text{ oppure } y=0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

- f è derivabile in $(0,0)$ lungo tutte le direzioni (No)

la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (*) vedi anche funzione a fondo pag. 8

è derivabile in $(0,0)$ poiché $f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_x(0,0) = 0$

$f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f_y(0,0) = 0.$

f però non è derivabile in $(0,0)$ lungo $\underline{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, poiché $f|_{y=x}$ non è continua in $(0,0)$. □

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = f(0,0)$ (Si) poiché la derivabilità in $(0,0)$ implica la continuità di $f(x,0)$ in $x_0 = 0$ □

- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t\underline{e}_1) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t\underline{e}_2) - f(0)}{t}$ (No)

La derivabilità di f in $(0,0)$ $\nRightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0)$!

Basta prendere $f(x,y) = x - y$; ovviamente f è derivabile in $(0,0)$ e risulta $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = -1$. ■

- | | | |
|-----|---------------|-------|
| 12. | Vedi A4_12_07 | Es. 6 |
| 13. | " | Es. 7 |
| 14. | " | Es. 8 |
| 15. | " | Es. 9 |
-