

1) Consideriamo in $\mathbb{C}$ l'eq. $\frac{\bar{z}}{1+i} + z = i + 1$. Otteniamo subito

$$\frac{\bar{z}}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} + z = i + 1$$

ovvia $\frac{\bar{z}(1-i)}{2} + z = i + 1$, per cui $\bar{z}(1-i) + 2z = 2 + 2i$.

Posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ otteniamo

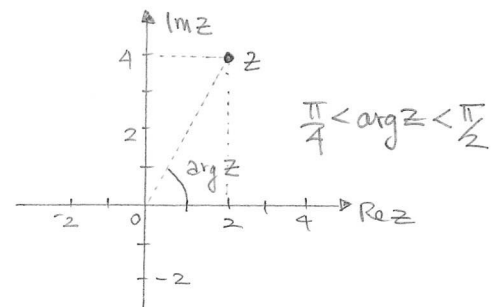
$$\bar{z}(1-i) + 2z = 2 + 2i \Leftrightarrow (x - iy)(1-i) + 2(x + iy) = 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + i(-x + y) = 2 + 2i$$

cioè
$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

La soluzione è quindi $z = 2 + 4i$

Oss. che $|z| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$



Risposta: (a).

2) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^3 - 1 & \text{se } x < 0 \\ 2x^3 - (x+1)^4 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = 2\sin x + \cos x.$$

Ricordiamo che l'eq. della retta tg. al grafico di $f \circ g$ nel pt. di ascissa π

è data da $y = (f \circ g)(\pi) + (f \circ g)'(\pi)(x - \pi)$. Ora $(f \circ g)(\pi) = f(g(\pi))$

$$= f(-1) = -3, \text{ e } (f \circ g)'(\pi) = f'(g(\pi))g'(\pi) = f'(-1)g'(\pi) =$$

$$= (4x^3 + 9x^2)|_{x=-1} \cdot (2\cos x - \sin x)|_{x=\pi} = 5 \cdot (-2) = -10.$$

Quindi l'eq. della retta tg. al grafico di $f \circ g$ nel pt. di ascissa π risulta

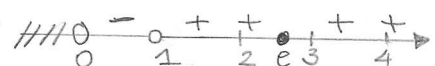
$$y = -3 - 10(x - \pi), \text{ ossia } y = \underbrace{-10}_a x + \underbrace{10\pi - 3}_b.$$

Risposta: (b).

3) $f(x) = \frac{|\log x - 1|}{\log x}$

• $\text{dom } f =]0, +\infty[\setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

• segno di f



On che
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \log x}{\log x} = \frac{1}{\log x} - 1 & \text{se } 0 < x < e, x \neq 1 \\ \frac{\log x - 1}{\log x} = 1 - \frac{1}{\log x} & \text{se } x \geq e \end{cases}$$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \Rightarrow$ l'affermazione in (2) è falsa.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{\log x} - 1 \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\log x} - 1 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\log x}\right) = 1$$

$\Rightarrow x = 1$ è asintoto verticale (da destra e da sinistra) per f ;

$y = 1$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

$$\bullet \text{ dom } f' = \text{dom } f \setminus \{e\} \quad f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x(\log x)^2} & \text{se } 0 < x < e, x \neq 1 \\ \frac{1}{x(\log x)^2} & \text{se } x > e. \end{cases}$$

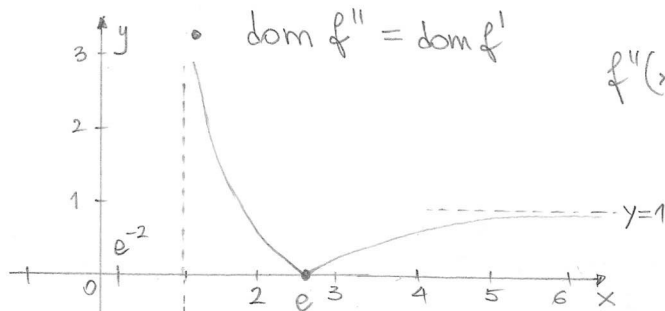
Oss. che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x(\log x)^2} = -\infty$  ∞ $\frac{f'}{f}$
 infinitesimo positivo!

$\Rightarrow$ l'affermazione in (b) è falsa.

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f'(x) = -\frac{1}{e} \quad \lim_{x \rightarrow e^+} f'(x) = \frac{1}{e} \quad x=e \text{ \u00e8 un pt. di non-derivabilit\u00e0}$$

per f ; $(e,0)$ \u00e8 un pt. angoloso!

$\Rightarrow$ l'affermazione in (c) è falsa.



$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(\log x)^2 + 2(\log x) + 2}{x^2(\log x)^3} & \text{se } 0 < x < e \\ -\frac{\log x + 2}{x^2(\log x)^3} & \text{se } x > e \end{cases}$$

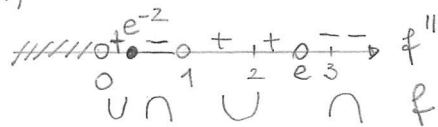
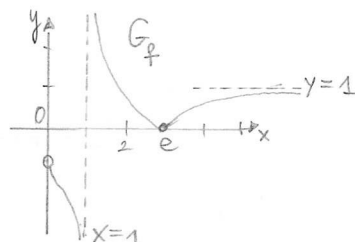
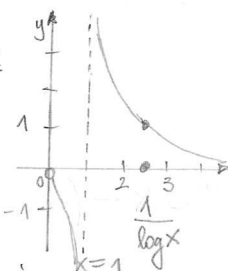
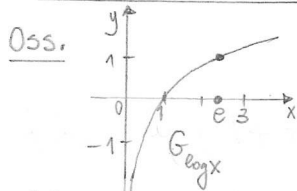


grafico qualitativo dif

$$\log x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

Risposta: (d).



A partire dal grafico di $\log x$ si $k=1$ $x=1$
 ottiene rapidamente il grafico di f ; ne esclude così subito la validità delle affermazioni in (a), (b), (c).

4) Sia $f(x) = \log(1+x) - x e^{\cos x - \sqrt{1+x}}$.

Ricordiamo che $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

$\left. \begin{array}{l} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos x - \sqrt{1+x} = -\frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

Inoltre $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$, per cui

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x \left[1 + \left(-\frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \right)^2 + o \left(\left(-\frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \right)^2 \right) \right]$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x \left[1 - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right]$$

$$= \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{4} + o(x^3) = \underline{\underline{\frac{7}{12}x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0.}}$$

Risposta: (c).

5) La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a \frac{\log(1+x)}{x} - b(x-1) & \text{se } x > 0 \\ \cos(\sqrt{a}x) + bx & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

ristretta agli intervalli $]-\infty, 0]$ e $]0, +\infty[$ è continua, poiché è ottenuta con somme e composizioni di funzioni continue. Affinché f sia continua su $\mathbb{R}$, basta determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che f risulti continua in $x=0$, cioè che valgano le uguaglianze

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

La funzione $\cos(\sqrt{a}x) + bx$ sull'intervallo $]-\infty, 0]$ è continua in $x=0$

e quindi abbiamo $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$. Perciò f è continua in $x=0$ se e solo se vale

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a \frac{\log(1+x)}{x} - b(x-1) \right],$$

che è equivalente a $a+b=1$. Consideriamo quindi la funzione f

$$f(x) = \begin{cases} a \frac{\log(1+x)}{x} - (1-a)(x-1) & \text{se } x > 0 \\ \cos(\sqrt{a}x) + (1-a)x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

che è continua su $\mathbb{R}$. Questa funzione ristretta agli intervalli

$]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ è derivabile, poiché è ottenuta con somme e composizioni di funzioni derivabili. Osserviamo che la derivata prima f' di f per $x \neq 0$ è data da

$$f'(x) = \begin{cases} a \frac{\frac{1}{1+x} \cdot x - \log(1+x)}{x^2} + a - 1 & \text{se } x > 0 \\ -\sqrt{a} \sin(\sqrt{a}x) + 1 - a & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x=0$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dal collaudo del teorema di Lagrange (o di de l'Hôpital) otteniamo

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a \frac{x - (1+x) \log(1+x)}{x^2(1+x)} + a - 1 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a \frac{x - (1+x) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)}{x^2(1+x)} + a - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a \frac{x - x + \frac{x^2}{2} - x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^2(1+x)} + a - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2(1+x)} + a - 1 \right] = \frac{a}{2} - 1 \end{aligned}$$

e

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [-\sqrt{a} \sin(\sqrt{a}x) + 1 - a] = 1 - a.$$

Perciò f è derivabile in $x=0$ se e solo se vale l'uguaglianza

$$\frac{a}{2} - 1 = 1 - a, \text{ ossia } a = \frac{4}{3}. \text{ Segue } b = -\frac{1}{3} \text{ e } \underline{\underline{f'(0) = -\frac{1}{3}}}.$$

Risposta: (b).

6) Oss. che tutti e tre le serie date sono serie a segni alterni. Notiamo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{n \sqrt{\log n}} = a_n$$

$$\text{con } \begin{cases} a_n > 0 & \forall n \geq 2 \\ a_n \downarrow \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ questa serie converge per il criterio di Leibniz;

$$\bullet \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(\arcsin \frac{1}{n \log(\log n)} \right) = a_n \quad \text{con} \begin{cases} a_n > 0 \quad \forall n \geq 3 \\ a_n \downarrow \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ questa serie converge per il criterio di Leibniz;

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\cos n\pi + 1)}{n^{3/2}} = a_n \quad \text{con} \begin{cases} a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1 \\ a_n \text{ non \u00e9 decrescente!} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0. \end{cases}$$

$$\parallel \frac{(-1)^n + 1}{n^{3/2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{2}{n^{3/2}} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

Questa serie converge assolutamente, e quindi converge, ma non converge grazie al criterio di Leibniz.

Risposta: (c).



7) Osserviamo che

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\sqrt[n]{3} - 1 \right)^n}_{= a_n} x^n \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{3} - 1 \right) = 0; \quad \text{quindi}$$

la serie di potenze data ha raggio di convergenza $r = \infty$.

Dunque la serie ha come insieme di convergenza $E = \mathbb{R}$.

$$\bullet \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{1 \cdot (x-1)^n}{(n+\sqrt{n})(\log n)^2}}_{= a_n} \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+\sqrt{n})(\log n)^2}{(n+1+\sqrt{n+1})(\log(n+1))^2} = 1; \quad \text{quindi}$$

la serie di potenze data ha raggio di convergenza $r = 1$.

Perci\u00f2 $\forall x \in \mathbb{R}$ per cui vale $|x-1| < 1$, cio\u00e8 $\forall x \in]0, 2[$ la serie converge, mentre non converge $\forall x \notin [0, 2]$. Rimane da studiare il carattere della serie per $x=0$ e per $x=2$.

Per $x=0$, la serie \u00e9 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\sqrt{n})(\log n)^2}$, che \u00e9 una serie a segni alterni convergente.

Per $x=2$, la serie \u00e9 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+\sqrt{n})(\log n)^2}$ che \u00e9 convergente, poich\u00e9 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ converge se $\alpha=1, \beta > 1$ oppure se $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$.

L'insieme di convergenza \u00e9 quindi $E = [0, 2]$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n^2} (x+1)^n$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=a_n}$

con $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n} = e^{-3/2}$; quindi

la serie di potenze data ha raggio di convergenza $r = e^{3/2}$.

Perciò $\forall x \in \mathbb{R}$ per cui vale $|x+1| < e^{3/2}$, cioè $\forall x \in]-1-e^{3/2}, -1+e^{3/2}[$

la serie converge, mentre non converge $\forall x \notin]-1-e^{3/2}, -1+e^{3/2}[$. Rimane

da studiare il carattere della serie per $x = -1-e^{3/2}$ e $x = -1+e^{3/2}$.

Per $x = -1-e^{3/2}$, la serie è $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n^2} (-e^{3/2})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n^2} e^{3n/2}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=b_n}$

Notiamo che $|(-1)^n b_n| = b_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n^2} e^{3n/2}$

$$= e^{3n^2 \log(1 - \frac{1}{2n})} e^{3n/2} = e^{3n^2 \left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} e^{3n/2}$$

$$= e^{-\frac{3}{8} + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-3/8} \neq 0.$$

Quindi $((-1)^n b_n)_n$ non converge a 0 e quindi non è soddisfatta

la condizione necessaria per la convergenza di una serie.

Analogamente risulta che anche in $x = -1+e^{3/2}$ non è soddisfatta

la condizione necessaria per la convergenza di una serie.

In definitiva, l'insieme di convergenza della serie data è

$E =]-1-e^{3/2}, -1+e^{3/2}[$, un intervallo aperto e limitato.

Risposta: (c).



8) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una succ. di nr. reali positivi tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$.

i) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ è convergente: (V) Dall'ipotesi e dalla continuità della funzione $f(x) = x^2$ segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{16}, \text{ ossia } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \frac{1}{16} < 1.$$

Dal criterio del rapporto per serie a termini positivi, risulta che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ è convergente.

ii) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ è convergente: (V) Basta procedere come in i) sfruttando la continuità della funzione $f(x) = \sqrt{x}$.



Risposta: (d).

9) Sia $f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $\int_{-1}^2 f(2x) dx = 3$.

Oss. che $3 = \int_{-1}^2 f(2x) dx = \int_{-2}^4 f(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^4 f(t) dt$

$\uparrow$
 $t = 2x$
 $x = \frac{t}{2}$
 $dx = \frac{1}{2} dt$

e quindi $\frac{1}{6} \int_{-2}^4 f(t) dt = \text{media integrale di } f \text{ su } [-2, 4] = 1.$

Per il teorema della media integrale $\exists x_0 \in [-2, 4]$ tale che $\frac{1}{6} \int_{-2}^4 f(t) dt = f(x_0)$,
e quindi $\exists x_0 \in [-2, 4]$ t.c. $f(x_0) = 1$.

Risposta: (b).

□

10) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{\arctan \sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

e $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$.

(a) Oss. che $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\arctan \sqrt{t}} dt \exists \text{ finito.}$

Infatti $g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{1}{\arctan \sqrt{t}}$ è continua, positiva
e $g(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ per $t \rightarrow 0^+$.

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt < +\infty$, per il criterio del confronto asintotico
anche $\int_0^1 g(t) dt$ è finito.

(b) Dobbiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$. Oss. che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(- \int_1^x g(t) dt \right)$

Notiamo che la funzione $g(t)$ è continua e positiva su $[1, +\infty[$;

inoltre $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \frac{2}{\pi}$. Segue $\int_1^x g(t) dt = +\infty$, e quindi

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$. Cerchiamo quindi di applicare il teorema di

de l'Hôpital per il calcolo del limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

Abbiamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(F(x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-g(x)) = -\frac{2}{\pi}$.

$\uparrow$
TFC

Dal teorema di de l'Hôpital segue $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = -\frac{2}{\pi}$.

(c) Notiamo che $F(x) = -\int_1^x f(t) dt = -\int_1^x \frac{1}{\arctan \sqrt{t}} dt$.

Dal TFC segue

$$F'(x) = -\frac{1}{\arctan \sqrt{x}} \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

Poiché $\frac{1}{\arctan \sqrt{x}}$ è derivabile su $]0, +\infty[$ si ha $F''(x) = -\left(\frac{1}{\arctan \sqrt{x}}\right)'$
 $\forall x \in]0, +\infty[$ e quindi

$$F''(x) = \frac{1}{2(\arctan \sqrt{x})^2 (1+(\sqrt{x})^2) \sqrt{x}} \quad \text{su }]0, +\infty[.$$

Risulta che $F''(x) > 0$ su $]0, +\infty[$ e quindi F è convessa su $]0, +\infty[$. Quindi l'affermazione in (c) è falsa.

(d) La funzione F ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$, poiché

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\int_x^0 e^t dt + \int_0^1 \frac{1}{\arctan \sqrt{t}} dt \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\int_x^0 e^t dt \right) + \int_0^1 \frac{1}{\arctan \sqrt{t}} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^t]_x^0 + \int_0^1 \frac{1}{\arctan \sqrt{t}} dt = 1 + \int_0^1 \frac{1}{\arctan \sqrt{t}} dt. \end{aligned}$$

□

Risposta: (c).

11) Notiamo che $\int_0^{+\infty} \frac{2e^{-x}}{1+2e^{-x}} dx$ è convergente. Infatti

$$0 < f(x) = \frac{2e^{-x}}{1+2e^{-x}} = \frac{2}{e^x + 2} \quad \text{su } [0, +\infty[.$$

$$\text{Si ha } \int_0^{+\infty} \frac{2}{e^x + 2} dx \leq \int_0^1 1 dx + \int_1^{+\infty} \frac{2}{e^x} dx = 1 + \frac{2}{e} \quad \text{e per il}$$

criterio del confronto l'integrale improprio dato è convergente.

Determiniamo ora una primitiva di f :

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{e^x + 2} dx &= 2 \int \frac{1}{t+2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt \\ &\quad \begin{array}{l} \uparrow \\ e^x = t \\ x = \log t \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \frac{1}{t+2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+2} \end{array} \\ &= \log |t| - \log |t+2| = \log \frac{e^x}{e^x + 2} \end{aligned}$$

Quindi
$$\int_0^{+\infty} \frac{2e^{-x}}{1+2e^{-x}} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\int_0^M \frac{2e^{-x}}{1+2e^{-x}} dx \right) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\log \frac{e^x}{e^x+2} \right]_0^M =$$

$$= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\log \frac{e^M}{e^M+2} - \log \frac{1}{3} \right) = \underline{\underline{\log 3.}}$$

Risposta: (c).

□

12) Dobbiamo calcolare
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^3(2x) \int_1^{\frac{1}{x}} t^2 e^{\frac{1}{t}} dt.$$

Oss. che il limite si presenta nella forma indeterminata $0(\infty)$, poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^{\frac{1}{x}} t^2 e^{\frac{1}{t}} dt = \int_1^{+\infty} t^2 e^{\frac{1}{t}} dt$$
 e $t^2 e^{\frac{1}{t}} \sim t^2$ per $t \rightarrow +\infty$.

Notiamo che $\frac{\sin^3(2x)}{(2x)^3} \cdot (2x)^3 \int_1^{\frac{1}{x}} t^2 e^{\frac{1}{t}} dt$. Per calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \int_1^{\frac{1}{x}} t^2 e^{\frac{1}{t}} dt$
 scriviamo $x^3 \int_1^{\frac{1}{x}} t^2 e^{\frac{1}{t}} dt = \frac{\int_1^{\frac{1}{x}} t^2 e^{\frac{1}{t}} dt}{\frac{1}{x^3}} = \frac{f(x)}{g(x)}$, con $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ nella
 forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Ora

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x^2} e^x \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{3}{x^4}} = \frac{e^x}{3} \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{3}.$$

Grazie al teorema di de l'Hôpital si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \int_1^{\frac{1}{x}} t^2 e^{\frac{1}{t}} dt = \frac{1}{3}$, e
 possiamo concludere affermando che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^3(2x) \int_1^{\frac{1}{x}} t^2 e^{\frac{1}{t}} dt = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}.$$

□

Oss. Si giunge ugualmente facilmente al risultato considerando

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_1^{\frac{1}{x}} t^2 e^{\frac{1}{t}} dt}{\frac{1}{\sin^3(2x)}}, \quad \text{senza considerare il limite notevole} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3(2x)}{(2x)^3} = 1$$

Risposta: (c).

13) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx.$$
 Studio della convergenza di questo integrale
 improprio.

Se $\alpha \leq 0$, $f(x) = \frac{\arctan x}{x^\alpha}$ è continua e positiva su $]0, +\infty[$

Inoltre $f(x) \geq \arctan x$ su $]1, +\infty[$ e $\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$.
Sia $\alpha > 0$. Allora:

per $x \rightarrow 0^+$ $f(x) \sim \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha-1 < 1$, ossia $\alpha < 2$,

per il criterio del confronto asintotico $\int_0^1 f(x) dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 2$.

per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \sim \frac{\pi}{2x^\alpha}$.

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$, per il criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$.

Risposta: (b).

□

14) $xy' + y - e^x \sin x = 0$ su $]0, +\infty[\Leftrightarrow y' = -\frac{1}{x}y + \frac{e^x \sin x}{x}$ su $]0, +\infty[$

La formula risolutiva per un'eq. diff. lineare del 1° ordine ci dà

$$y(x) = e^{-\log x} \left(C + \int \frac{e^x \sin x}{x} \cdot e^{\log x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(C + \int e^x \sin x dx \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(C + \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} \right)$$

Indichiamo con $\hat{y}(x)$ l'unica funzione su $]0, +\infty[$, soluzione dell'eq. diff.

data, che soddisfa $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \hat{y}(x) = 0$

Oss. che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x y(x) = C - \frac{1}{2}$; esso risulta 0 se e solo se $C = \frac{1}{2}$.

Quindi $\hat{y}(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} + \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} \right)$.

Risulta

$$\frac{\hat{y}(x)}{x} = \frac{1 + (1+x+x^2+o(x^2)) \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}{2x^2}$$

$$= \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Risposta: (b).

□

15) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, sia S l'insieme delle soluzioni dell'eq. diff. $y'' + \alpha y' = 0$.

Oss. che $y'' + \alpha y' = 0$ è un'eq. diff. lineare del 2° ordine a coeff. costanti omogenea. L'eq. caratteristica associata è $z^2 + \alpha z = 0$, le cui soluzioni

sono $z_1 = 0$, $z_2 = -\alpha$. Risulta quindi che

$$S = \{y(x) = c_1 + c_2 x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \quad \text{se } \alpha = 0$$

$$S = \{y(x) = c_1 + c_2 e^{-\alpha x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \quad \text{se } \alpha \neq 0.$$

Possiamo allora asserire che l'affermazione in

(a) è falsa : le funzioni $y(x) = c_1 + c_2 x$ non sono limitate su $[0, +\infty[$ se $c_2 \neq 0$,
ma non lo sono nemmeno le soluz. $y(x) = c_1 + c_2 e^{-\alpha x}$
per $\alpha < 0$, $c_2 \neq 0$.

(b) è falsa : le funzioni $y(x) = c_1 + c_2 e^{-\alpha x}$ sono limitate su $[0, +\infty[$
per $\alpha > 0$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; esse non sono costanti
se $c_2 \neq 0$.

(c) è falsa : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c_1 + c_2 e^{-\alpha x}}{x^2} \neq 0$ se $c_2 \neq 0$, $\alpha < 0$
per la gerarchia degli infiniti.

(d) è vera : il pbm. di Cauchy $\begin{cases} y'' + \alpha y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ ammette una ed

una sola soluzione. [Oss. che per $\alpha = 0$ essa è $y(x) = x$ su $\mathbb{R}$, mentre
per $\alpha \neq 0$ essa è $y(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}$ su $\mathbb{R}$].

Risposta: (d).

Oss. Sapendo che solo una delle quattro affermazioni
è vera e (d) è vera (teorema di Esistenza ed Unicità
della soluzione per il pbm. di Cauchy associato a $y'' + \alpha y' = 0$)
non è nec. controllare se le affermazioni in (a), (b), (c)
sono vere o no! □