2021-02-13 secondo appello

1.

Se $z \in \mathbb{C}$ è una soluzione dell'equazione

$$\frac{\overline{z}}{1+i} + z = i + 1,$$

allora

(a) si ha $4 < |z| < 5$
(b) si ha $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$
(c) si ha $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$
(d) z^4 si trova nel secondo quadrante del piano complesso

2.

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^3 - 1 & \text{se } x < 0 \\ 2x^3 - (x+1)^4 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = 2\sin x + \cos x$$

e $y = ax + b$ l'equazione della retta tangente al grafico di $f \circ g$ nel punto di ascissa π. Allora si ha

(a) $a < 0$ e $b < 0$
(b) $a < 0$ e $b > 0$
(c) $a > 0$ e $b < 0$
(d) $a > 0$ e $b > 0$

3.

Sia

$$f(x) = \frac{|\log x - 1|}{\log x}.$$

Allora

(a) la retta di equazione $x = 0$ è un asintoto verticale (da destra) per f
(b) si ha $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$
(c) $x = e$ è un punto critico per f

(d) f è convessa sia su $]0, e^{-2}]$ sia su $]1, e]$

4.

L'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = \log(1+x) - xe^{\cos x - \sqrt{1+x}}$$

rispetto all'infinitesimo campione x è

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

5.

Sia $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la coppia per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a\frac{\log(1+x)}{x} - b(x-1) & \text{se } x > 0 \\ \cos(\sqrt{a}x) + bx & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in 0. Allora per tale coppia $f'(0)$ è uguale a

(a) $-\frac{4}{3}$
(b) $-\frac{1}{3}$
(c) 1
(d) nessuno dei valori indicati nelle altre risposte

6.

Quante delle serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{n\sqrt{\log n}} \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n \log(\log n)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\cos n\pi + 1)}{n^{3/2}}$$

convergono per il criterio di Leibniz?

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

7.

Quale delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{3}-1)^n x^n \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+\sqrt{n})(\log n)^2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{3n^2} (x+1)^n$$

ha come insieme di convergenza un intervallo aperto e limitato?

(a) La prima
(b) La seconda
(c) La terza
(d) Nessuna

8.

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}.$$

Quali delle seguenti due affermazioni sono necessariamente vere?

i) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ è convergente.

ii) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ è convergente.

(a) Nessuna delle due
(b) Soltanto la prima
(c) Soltanto la seconda
(d) Entrambe

9.

Sia $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ continua tale che

$$\int_{-1}^{2} f(2x)\, dx = 3.$$

Allora esiste $x_0 \in [-2, 4]$ tale che

(a) $f(x_0) = \frac{1}{2}$

(b) $f(x_0) = 1$
(c) $f(x_0) = \frac{3}{2}$
(d) $f(x_0) = 3$

10.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\arctan \sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia

$$F(x) = \int_x^1 f(t)\, dt.$$

Quale delle seguenti quattro affermazioni è falsa?

(a) Esiste finito il limite $\lim_{x \to 0^+} F(x)$.
(b) Si ha $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = -\dfrac{2}{\pi}$.
(c) La funzione F è concava su $]0, +\infty[$.
(d) La funzione F ha un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

11.

L'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} dx$$

(a) non è convergente
(b) è minore di $\log 3$
(c) è uguale a $\log 3$
(d) è maggiore di $\log 3$

12.

Il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \sin^3(2x) \int_1^{\frac{1}{x}} t^2 e^{1/t}\, dt$$

è uguale a

(a) $-\frac{8}{3}$

(b) 0
(c) $\frac{8}{3}$
(d) $-\infty$

13.

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}\, dx$$

è convergente?

(a) $\alpha < 1$
(b) $1 < \alpha < 2$
(c) $\alpha > 2$
(d) $\alpha \geq 1$

14.

Sia $\hat{y}(x)$ l'unica funzione a valori reali definita su $]0, +\infty[$ che risolve l'equazione differenziale

$$xy' + y - e^x \sin x = 0$$

e per la quale si ha

$$\lim_{x \to 0^+} x\hat{y}(x) = 0.$$

Allora il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\hat{y}(x)}{x}$$

è uguale

(a) 0
(b) $\frac{1}{2}$
(c) 1
(d) nessuno dei valori proposti

15.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + \alpha y' = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

(a) Ogni funzione $y \in \mathcal{S}$ è limitata su $[0, +\infty[$.

(b) Le funzioni in $\mathcal{S}$ limitate su $[0, +\infty[$ sono tutte e sole le funzioni costanti.

(c) Per ogni funzione $y \in \mathcal{S}$ si ha $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x^2} = 0$.

(d) Esiste un'unica funzione $y \in \mathcal{S}$ che soddisfa $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.