2021-09-06 Terzo appello - AM A

1. **2021-09-06-01**

   Sia S l'insieme delle soluzioni complesse del sistema

   $$\begin{cases} (z^2+4i)(\overline{w}+i)=0 \\ w\overline{z}-i=0. \end{cases}$$

   Allora

   il numero di elementi di S è ___

   ogni soluzione $(z,w)\in S$ soddisfa $|\overline{w}z|=1$ | Vero | Falso |

   esiste una soluzione $(z,w)\in S$ tale che $\mathrm{Re} w=0$ | Vero | Falso |

   $\sqrt{2}\big[\max\{\mathrm{Re}z : z \text{ è soluzione del sistema}\} - 4\min\{\mathrm{Im}w : w \text{ è soluzione del sistema}\}\big] =$ ___ .

2. **2021-09-06-02**

   Il limite

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^6}\int_1^{x^2} 3t^2\left(1+\frac{2}{\pi}\arctan t\right)dt$$

   è uguale a ___ .

3. **2021-09-06-03**

   Siano date le serie

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\arcsin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right]\frac{(3n)^2}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\frac{(n+2)!}{n^n}.$$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   La prima serie è convergente. | Vera | Falsa |

   La seconda serie è convergente. | Vera | Falsa |

4. **2021-09-06-04**

   Si ha
$$\int_{-1}^{+\infty} e^{1-\sqrt{|x|}}\,dx = A + Be$$
   dove $A = \_\_$ e $B = \_\_$.

5. **2021-09-06-05**

   Sia y la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = \sin x \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$$
   Sia α il numero reale positivo per cui esiste finito e diverso da 0 il
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3y(x)}{x^\alpha}.$$
   Allora si ha $\alpha = \_\_$ e per tale valore di α il limite vale $\_\_$.

6. **2021-09-06-06**

   Sia $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x-1| - 1$.

   Allora si ha $\|f\|_\infty = \_\_$ e $\|f\|_1 = \_\_$.

7. **2021-09-06-07**

   Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$. Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   Sia $C_\alpha = \{\alpha \geq 0 : f_\alpha \text{ è continua in } (0,0)\}$. Allora $\inf C_\alpha = \_\_$.

   Tale estremo inferiore è un minimo

Vero
Falso

Sia $D_\alpha = \{\alpha \geq 0 : f_\alpha$ è derivabile in $(0,0)\}$. Allora $\inf D_\alpha = \overline{}$.

Tale estremo inferiore è un minimo

Vero
Falso

8. **2021-09-06-08**

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che nel punto $(0,0)$ ammette tutte le derivate direzionali.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

f è derivabile in $(0,0)$

Sì
No

f ammette piano tangente al grafico nel punto $(0,0,f(0,0))$

Sì
No

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\mathbf{0}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{0})}{t} = \langle \nabla f(\mathbf{0}), \mathbf{v}\rangle$ per ogni direzione $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^2$

Sì
No

Esiste finito $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t\mathbf{v}) - f(\mathbf{0})}{t\|\mathbf{v}\|}$ per ogni vettore $\mathbf{v}$ non nullo in $\mathbb{R}^2$

Sì
No

9. **2021-09-06-09**

Sia

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1-2|y|}\log(x^2+y^2-1) \leq 0\}.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

$(1,0)$ è un punto della frontiera di A

Vera
Falsa

$A = \overline{A}$

Vera
Falsa

$\overline{A}$ è compatto

Vera
Falsa

L'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è connesso per poligonali

Vera
Falsa

L'insieme A è convesso

Vera
Falsa

$\forall \mathbf{x} \in A$, $\exists r > 0$ tale che $B_r(\mathbf{x}) \subset A$

Vera
Falsa

10. **2021-09-06-10**

    Sia $\vartheta \in [-\pi, \pi[$ il numero per cui la direzione $\mathbf{v} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ è quella lungo cui è minima la crescita della funzione

    $$f(x, y) = (x^2 - y)\log(x + y)$$

    nel punto $(1, 0)$. Allora si ha

    (a) $\vartheta = \frac{\pi}{4}$
    (b) $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$
    (c) $\vartheta = -\frac{3\pi}{4}$
    (d) $\vartheta = 0$

11. **2021-09-06-11**

    Sia

    $\mathbf{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) = (x^2+3yz, y^2+4xz, -2z^2)$.

    Allora si ha

    div $\mathbf{f}(1, 1, 1) =$ __

    $\Delta f_2(1, 1.1) =$ __

    $\|\nabla f_3(1, 1, 1)\| =$ __

    $D_{\mathbf{v}} f_3(1, 1, 1) =$ __ dove $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 0, 1)$.

12. **2021-09-06-12**

    Il punto del grafico della funzione $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ in cui il piano tangente è ortogonale alla retta di equazioni

    $$x = -t \qquad y = 4t \qquad z = \frac{1}{2}t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

    ha coordinate (x_0, y_0, z_0) con $x_0 =$ __, $y_0 =$ __, $z_0 =$ __.

13. **2021-09-06-13**

Sia $\mathbf{r} : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t, 2\sin t).$$

Allora

$\mathrm{Im}\mathbf{r} \subset \partial B_\delta(\mathbf{0})$ con $\delta =$ ___

$\|\mathbf{r}'(t)\| =$ ___ per ogni $t \in [0, 2\pi[$

la curva

è
non è

singolare per qualche $t \in [0, 2\pi[$

l'equazione parametrica della retta tangente al sostegno della curva nel punto $(1, 1, \sqrt{2})$ è

$$\begin{cases} x = a + bs \\ y = c + ds \\ z = \sqrt{2} + \sqrt{2}s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R},$$

dove $a =$ ___, $b =$ ___, $c =$ ___, $d =$ ___.

14. **2021-09-06-14**

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = 8x^2 + y^4(1 - x).$$

Allora

la funzione f ha ___ punti critici.

Il punto critico $(0, 0)$ è un punto di

massimo locale
minimo locale
sella

Sia $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$. Allora si ha

$\min_Q f =$ ___ e $\max_Q f =$ ___ .

I punti di massimo in Q sono (___ , -1) e (___ , 1).

15. **2021-09-06-15**

Verificate che l'equazione

$$x^2 - 2x + e^z + \sin z - 2y^2 = 0$$

definisce implicitamente una funzione $z = \varphi(x, y)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $(x_0, y_0) = (1, 0)$ tale che $\varphi(1, 0) = 0$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti due affermazioni se è vera o falsa.

La funzione φ ha un punto critico in $(1, 0)$

Vera
Falsa

La matrice hessiana di φ in $(1, 0)$ è definita negativa

Vera
Falsa

Il polinomio di Taylor di φ in $(1, 0)$ del secondo ordine è dato da

$$a(x-1) + by + \frac{1}{2}[c(x-1)^2 + d(x-1)y + ey^2]$$

con $a = \overline{}$, $b = \overline{}$, $c = \overline{}$, $d = \overline{}$, $e = \overline{}$.