Università di Trento – Dip. di Matematica
CdL in Matematica e CdL Fisica

Diario del Corso di Analisi Matematica A e Analisi Matematica 1 - a.a. 2020/21
Prof. Anneliese Defranceschi

15/09/20 (2 ore): Introduzione al corso: orario, esercitazioni, ricevimento studenti, sito web. Proposizioni. Esempi. Proposizioni equivalenti. Proposizioni composte. Connettivi logici (non, e, o, implicazione, doppia implicazione) e la loro tavola di verità. Condizione necessaria e condizione sufficiente. Tautologie. Proprietà di 'e' ed 'o' (commutativa, associativa, distributiva). La negazione ed 'e'; la negazione ed 'o'. La negazione e l'implicazione.
Modus Ponens. Principio di contrapposizione. Loro applicazione nelle dimostrazioni.
Predicati. Esempi. Predicati con più variabili. Esempi. Quantificatori (per ogni; esiste). Esempi. Quantificatori e predicati con più variabili.
Negazione di una proposizione contenente quantificatori.
Dimostrazione che radice di 2 è irrazionale.
Terminologia sugli insiemi (enumerazione; mediante predicati). Simbolo di appartiene ($\in$) e di non appartiene ($\notin$). Esempi. Insiemi numerici: **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C**.
Nota 1Lez Pag. 1-15

16/09/20 (2 ore): Esercizi: proposizioni con quantificatori e loro negazione.
Insieme vuoto. Sottoinsieme di un insieme. Uguaglianza di insiemi. Gli insiemi $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$. Gli intervalli limitati (chiusi, aperti,...), gli intervalli illimitati. La loro rappresentazione grafica. Insieme delle parti di un insieme. Esempi.
Unione, intersezione di insiemi. Differenza (differenza simmetrica) di insiemi, complementare (diagrammi di Venn). Esercizi di insiemistica (scrittura corretta; unione, intersezione, differenza di insiemi).
Prodotto cartesiano di due insiemi. Esempi. Il prodotto cartesiano **RxR** e sua rappresentazione grafica. Rappresentazione grafica di alcuni sottoinsiemi di **RxR**.
Funzioni. Motivazione per lo studio di funzioni. Dominio, codominio, legge. Esempi. Funzione di variabile reale a valori reali. Dominio naturale (Insieme di definizione). Uguaglianza di due funzioni. Immagine di un insieme tramite una funzione. Immagine di una funzione. Grafico.
Grafici delle funzioni elementari (vedi allegati alla lezione).
Funzioni particolari: la restrizione, l'identità, la funzione caratteristica, Successioni.
Funzione composta ed esempi. Funzioni iniettive, suriettive. Funzione biiettiva.
Nota 2Lez Pag. 16-30

18/09/20 (2 ore): **Esercitazione:** Elementi di logica (tavole di verità, quantificatori e negazione) e di insiemistica. Rappresentazioni di sottoinsiemi di **RxR.** Funzioni. Trasformazioni di grafici. Funzioni iniettive/suriettive. Funzioni composte.

22/09/20 (2 ore): Funzione biiettiva. Funzione inversa. Grafico della funzione inversa per funzione reali di variabile reale. Funzioni inverse delle funzioni elementari. Le funzioni trigonometriche inverse. La funzione controimmagine.
Insiemi numerici. Simbolo sommatoria.
I numeri naturali e il principio di induzione. Esempi (somma dei primi n numeri naturali; somma dei primi n termini di una progressione geometrica; la disuguaglianza di Bernoulli). Il binomio di Newton.
Il ruolo del principio di induzione nelle definizioni per ricorrenza (o ricorsive). n-fattoriale.

I numeri interi relativi. I numeri razionali. Rappresentazione decimale dei numeri razionali (allineamenti decimali).
Nota 3Lez Pag. 31-44

23/09/20 (2 ore): **Q** è un campo.
Alcune conseguenze. La legge di annullamento del prodotto (commento sulla sua applicazione). La relazione d'ordine $\leq$ (ordinamento totale) e la compatibilità dell'ordine con le operazioni di somma e prodotto (commento sulle loro applicazioni). **Q** è un campo ordinato.
La relazione d'ordine <. *Proprietà di densità. Proprietà di Archimede.* Corollari.
I numeri reali **R**. Definizione/rappresentazione dei numeri reali usando gli allineamenti decimali. Definizione di numero irrazionale. (Approssimazione di radice di due con un allineamento decimale).
In **R** valgono ancora la proprietà archimedea e la proprietà di densità (sia dei razionali che degli irrazionali). *Assioma di continuità.*
In **Q** non vale l'assioma di continuità.
Il valore assoluto: definizione e proprietà. Disuguaglianza triangolare. Disequazioni con il valore assoluto.
Maggiorante e minorante di un insieme numerico. Insiemi numerici limitati inferiormente, limitati superiormente, limitati. Esempi.
Massimo e minimo di un insieme numerico. Unicità del massimo (minimo), se esiste. Esempi.
Estremo superiore e estremo inferiore di un insieme numerico. Confronto con il massimo e il minimo. Esempi.
Teorema (*Completezza di* **R**): Esistenza dell'estremo superiore (estremo inferiore) in **R** per sottoinsiemi superiormente limitati (inferiormente limitati).
Caratterizzazione dell'estremo superiore/estremo inferiore. Esempi.
Nota 4Lez Pag. 45-61

25/09/20 (2 ore): **Esercitazione:** Funzione inversa; controimmagine. Funzioni trigonometriche inverse. Principio di induzione. Insiemi limitati superiormente/inferiormente. Estremo superiore/estremo inferiore di sottoinsiemi di **R**. Massimo/minimo di un insieme.

29/09/20 (2 ore): Esercizio: su limitatezza di insiemi discreti e non; inf/sup (con caratterizzazione).
Teorema di esistenza della radice n-esima di un numero reale non negativo. (Cenno di dim.). La radice n-esima di un numero negativo, se n è dispari.
Potenze ad esponente reale e base $a > 0$ fissata (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie (x, a^x) nel piano cartesiano).
Esercizi (risoluzione di equazioni e disequazioni lasciati per casa).
Teorema di esistenza del logaritmo in base a di un numero positivo (rappresentazione grafica delle coppie $(x,\log_a x)$ nel piano cartesiano).
Notazione: $\log_e x$ sarà sempre denotato con $\log x$. Proprietà dei logaritmi. Esercizi lasciati per casa.
Numeri complessi:
$C=(\{(a,b): a, b \in R\}, +, \bullet)$ con le operazioni $+$ e $\bullet$ opportunamente definite è un campo. $C_0=(\{(a,0): a \in R\}, +, \bullet)$ è algebricamente isomorfo a $(R, +, \cdot)$.
Rappresentazione geometrica: piano complesso (piano di Gauss).
La forma algebrica (cartesiana) di un numero complesso. Parte reale e parte immaginaria. L'addizione e la moltiplicazione. Esempi.
Nota 5Lez Pag. 62-78

30/09/20 (2 ore): La sottrazione. Esempi. Interpretazione geometrica della somma. Coniugato, modulo e argomento e la loro interpretazione geometrica.
Forma trigonometrica di un numero complesso. Dalla forma algebrica alla forma trigonometrica e viceversa. Esempi.
Interpretazione geometrica della moltiplicazione (divisione).

Potenza n-esima di un numero complesso. Esempi. *Radici n-esime di un numero complesso* (dim.) Rappresentazione geometrica. Esempi.
Forma esponenziale di un numero complesso. Teorema fondamentale dell'algebra.
Risoluzione di equazioni di secondo grado in **C**. Esercizi assegnati per casa.
Sistemi di numeri complessi.
Nota 6Lez Pag. 79-95

02/10/20 (2 ore): **Esercitazioni:** Qualche disuguaglianza (media aritmetica, geometrica, armonica). Numeri complessi (forma algebrica/trigonometrica/esponenziale; coniugato; modulo; potenze/radici; equazioni in **C**; rappresentazione grafica in **C**; immagini di funzioni in **C**; sistemi). Estremo superiore/estremo inferiore di sottoinsiemi di **R**.

06/10/20 (2 ore): Somma/differenza/prodotto/rapporto di funzioni reali. Funzione parte positiva e funzione parte negativa.
Proprietà globali di funzioni reali di variabile reale:
Funzioni monotone. Funzione crescente (strettamente crescente)/ decrescente (strettamente decrescente). Intervalli di monotonia. Esempi. Monotonia e iniettività. Stretta monotonia e invertibilità di una funzione. Monotonia per successioni. Monotonia di $a_n=(n^2-1)/n$.
Funzione parte intera.
Funzioni simmetriche. Insieme simmetrico (rispetto all'origine). Funzione pari/dispari. Rappresentazione grafica. Esempi.
Funzioni periodiche. Funzione periodica di periodo T (oppure T-periodica). Intervallo di periodicità. Funzione mantissa. Funzioni trigonometriche: coseno, seno, tangente.
Funzioni limitate. Rappresentazione grafica.
Estremi di una funzione. Funzione limitata superiormente/inferiormente/limitata. Rappresentazione grafica. Esempi.
Estremo inferiore/estremo superiore di una funzione. Esempi.
Caratterizzazione estremo inferiore/estremo superiore di una funzione.
Massimo (globale/assoluto) di una funzione. Punto di massimo. Minimo (globale/assoluto) di una funzione. Punto di minimo. Unicità degli estremi (massimo/minimo), se esistono. Esempi.
Proprietà locali di una funzione:
La distanza euclidea in **R**; intorno (sferico) di un punto di R. Insieme degli intorni. *Punto di minimo/massimo locale* (relativo) di una funzione. Punto di minimo/massimo locale forte (o stretto).
Esempio: lettura dei punti estremi (globali e locali) da un grafico.
Introduzione al concetto di limite mediante esempi:
i) limiti per una funzione reale definita su **R**\{2,6} e rappresentata graficamente.
Nota 7Lez Pag. 96-110

07/10/20 (2 ore): ii) limite di una successione $(a_n)_n$ per n tendente a +∞.
La retta reale estesa. Intorno di -∞ e di +∞. Punto di accumulazione. Punto isolato. Esempi.
Definizione (unificata) di limite di una funzione.
Commenti sulla definizione (unificata) di limite di una funzione. Casi particolare: $x_0=2$ e l=1; $x_0=-\infty$ e l=+∞ (visto con l'esempio in ii)). Limite finito.
Calcolo di limiti usando la definizione: limite di x^2 per x tendente a 0; limite di sinx per x tendente a 0; limite di $1/x^2+2$ per x tendente a +∞.
Unicità del limite, se esiste. Esistenza del limite finito implica la locale limitatezza della funzione. Teorema della permanenza del segno.
Esempi di non esistenza del limite (funzioni oscillanti!).
Punto di accumulazione sinistro (destro). Intorno sinistro (destro). Limite sinistro (destro). Caratterizzazione del limite mediante il limite sinistro e limite destro. Esempio di non esistenza del limite (caso in cui il limite destro e il limite sinistro esistono ma non coincidono). Esempio di non esistenza del limite destra.

Algebra dei limiti (per limiti finiti). Applicazioni.
Parziale estensione dell'algebra dei limiti con limiti infiniti o nulli.
Dimostrazione del limite del prodotto. Calcolo di limiti usando l'algebra dei limiti e sua estensione parziale a **R** esteso.
Teorema del confronto (dei due carabinieri). Esempi. Forme indeterminate: $+\infty - \infty$; $0(+\infty)$, ∞/∞, $0/0$; (forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0); perché $+\infty - \infty$ è una forma indeterminata.
Nota 8Lez Pag.111-130

09/10/20 (2 ore): **Esercitazione:**
Limiti notevoli delle funzioni trigonometriche.
Limiti di alcune successioni (a^n, $a^{1/n}$, $n^{1/n}$, per n tendente a $+\infty$)
Limite di alcune successioni ($(\log_b n)/n^\beta$, n^β/a^n, $a^n/n!$, $n!/n^n$ per n tendente a $+\infty$).
Gerarchia degli infiniti per successioni.

13/10/20 (2 ore): Qualche strategia per 'uscire' dalle forme indeterminate $+\infty - \infty$; ∞/∞.
Rappresentazione/interpretazione grafica dei limiti notevoli delle funzioni trigonometriche. Qualche limite ∞/∞ usando la gerarchia degli infiniti per successioni.
Limite della funzione composta (formule di cambiamento di variabili). Esercizi.
I limiti notevoli per l'arcoseno e l'arcotangente.
Teorema di esistenza del limite sinistro (destro) di funzioni monotone (dim. Esistenza del limite sinistro per una funzione crescente)
Esistenza del limite o non di funzioni monotone.
Applicazioni:
- comportamento delle funzioni elementari ('continuità' delle potenze, esponenziali e logaritmi; delle funzioni trigonometriche e trigonometriche inverse – accennato -). Limiti usando la 'continuità' delle funzioni elementari.
Gerarchia degli infiniti ($\log_b x$, x^β, a^x per x tendente a $+\infty$) (seguono dalla continuità delle potenze, esponenziali e logaritmi e dal limite di funzioni composte – non dim.)
- determinazione di inf e sup di insiemi senza l'uso della caratterizzazione.
Limite di $f(x)^{g(x)}$ per f(x) positiva in un intorno di x_0. Forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0. Il limite notevole – dato per buono per ora – che può essere utili nel caso 1^∞ : $[\log(1+x)]/x$ tende a 1 per x tendente a 0.
Accennato anche al limite di $(e^x-1)/x$ tende a 1 per x tendente a 0. Esercizi per i casi 0^0, ∞^0, 1^∞.
Nota 9Lez Pag. 131-143

14/10/20 (2 ore): La successione $(1+1/n)^n$ è strett. crescente e limitata; il suo limite è definito uguale a "e". Alcuni limiti legati ad e: vari corollari. Limiti notevoli: $(e^x-1)/x$ tende a 1 per x tendente a 0; $[\log(1+x)]/x$ tende a 1 per x tendente a 0. Esercizi.
Teorema (ponte): legame tra limite di funzioni e limiti di successioni.
Funzione continua in un punto. Definizioni equivalenti. Funzione continua in un insieme. Esempi (Continuità delle funzioni potenze, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche). Continuità da destra e continuità da sinistra in un punto di accumulazione appartenente all'insieme. Punti di discontinuità.
Somma, prodotto, rapporto di funzioni continue. Lo spazio vettoriale $C^0(I)$. Continuità della funzione composta di funzioni continue. Continuità di una funzione definita a tratti. Esempio.
Teoremi generali per le funzioni continue su un intervallo.
Permanenza del segno. *Teorema di esistenza degli zeri (enunciato).*
Cosa succede se viene a mancare una delle sue ipotesi? Dim. del teorema di esistenza degli zeri (metodo di bisezione. Solo accennato brevemente)
Nota 10Lez Pag. 144-158

16/10/20 (2 ore): **Esercitazione:** Limiti: usando la definizione; algebra dei limiti; algebra estesa dei limiti. Strategie per "uscire dalle forme indeterminate".
Continuità di funzioni definite a tratti (con e senza parametri).
Limiti di ogni tipo.

20/10/20 (2 ore): Dim. Teorema esistenza degli zeri. Applicazione del teorema di esistenza degli zeri per la risoluzione di un'equazione del tipo f(x)=g(x). Corollario: se due funzioni continue f e g su [a,b] verificano f(a)>g(a) e f(b)<g(b) (o viceversa), allora esiste x_0 in]a,b[tale che $f(x_0)=g(x_0)$.
Teorema dei valori intermedi (dim.)
Corollario: L'immagine di un intervallo tramite una funzione continua è ancora un intervallo.
Monotonia e invertibilità: f continua e iniettiva su un intervallo I implica f strettamente monotona su I. Continuità della funzione inversa di una funzione continua e iniettiva su un intervallo. Continuità delle funzioni trigonometriche inverse.
Teorema di Weierstrass: esistenza del massimo e del minimo di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato [a,b].
Cosa succede se le ipotesi su f e su [a,b] vengono a mancare? A priori non si può dire nulla sull'esistenza di min e max: possono esserci massimo/minimo come possono anche non esserci. Esempi. Commento breve su dove possono 'cadere' eventuali punti di massimo/punti di minimo.
Caratterizzazione delle funzioni esponenziali e logartmiche.
Funzioni iperboliche. Definizioni e proprietà fondamentali.
Infinitesimi e infiniti. I simboli ~, o(.), O(.).
Definizioni. Infinitesimi (infiniti) a confronto. Funzioni asintotiche. Esempi.
Nota 11Lez. Pag. 159-172

21/10/20 (2 ore): I simboli f(x)=o(g(x)) per x tendente a x_0, o(1). Significato nel caso di f, g infinitesimi e f, g infiniti. Esempi. "Regole di calcolo" per o(1). Esercizi.
I limiti notevoli scritti con il linguaggio degli o(.).
"Regole di calcolo" per $o(x^\alpha)$ per x tendente a 0.
Uso degli o(.) nel calcolo di limiti nella forma indeterminata 0/0. Caso $(\sin x - x)/x^3$ per x tendente a 0.
Ordine di infinitesimo (o infinito/si fa analogamente). Esempi.
Esempi di ordini di infinitesimo. Parte principale di un infinitesimo (rispetto all'infinitesimo x, per x che tende a 0, o rispetto all'infinitesimo $(x-x_0)$, per x che tende a x_0. Il simbolo O(.).
Asintoti: orizzontali ed obliqui; asintoti verticali. Qualche esempio
Derivate. Motivazione geometrica per l'introduzione della derivata. Rapporto incrementale. *Derivata di una funzione in un punto.*
Nota 12Lez Pag. 173-184

23/10/20 (2 ore): **Esercitazione:** Continuità/estensione continua e i teoremi fondamentali delle funzioni continue: applicazioni. Teorema della permanenza del segno; teorema di esistenza degli zeri; teorema dei valori intermedi; continuità della funzione inversa, teorema di Weierstrass (Weierstrass generalizzato).
Proprietà di ~ e l'uso degli o(.).

27/10/20 (2 ore): Derivata destra e derivata sinistra di una funzione in un punto. Funzione derivabile in un punto. Funzione derivabile in un insieme. La funzione derivata.
Interpretazione geometrica della derivata e pendenza della *retta tangente al grafico di una funzione derivabile* (come retta 'limite' di rette secanti).
Derivate di alcune funzioni elementari. Es. di retta tangente.
Teorema: *Se f è derivabile in un punto, è continua nel punto.*
Non vale il viceversa: |x| è continua in x=0, ma non derivabile in x=0.
Punti di non derivabilità (pt. angoloso, cuspidi, pt con tangente verticale)

Tabella derivata di alcune funzioni elementari (potenze, x^α, esponenziale, logaritmo, seno, coseno). Comportamento delle funzioni $f(x)=x^3$, f(x)= radice cubica di x, f(x)= senx in un intorno di x=0 mediante la derivata in x=0 (e la tangente).
Derivate di ordine superiore. *Algebra delle derivate.*
Derivata del prodotto (dim.). Derivata della tangente (come derivata del rapporto). Lo spazio vettoriale $C^1(I)$.
Esercizi: derivate, ricerca dell'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)=x^2e^x$ nei punti di coordinata x=-2 e x=0). Derivabilità di funzioni definite a tratti.
Nota 13Lez Pag. 186-199

28/10/20 (2 ore): Teorema: derivata della funzione composta. Casi speciali: $e^{f(x)}$; log(|f(x)|); $(f(x))^n$. Qualche esercizio di calcolo.
Teorema: derivata della funzione inversa. Commento sulla derivata della funzione inversa nei casi in cui $f'(x_0)=0$ oppure $f'(x_0)= +\infty$ ($-\infty$).
Es. Calcolo della derivata della funzione inversa in un punto di una funzione strettamente crescente e derivabile in **R** senza la determinazione analitica della funzione inversa. Derivata delle funzioni arctgx, arcsinx, arccosx

Funzione differenziabile. Differenziale. Differenziabilità e derivabilità.
Teoremi fondamentali per funzioni derivabili (su un intervallo).
Punto critico (o stazionario) di una funzione.
Teorema di Fermat (dim.) *Teorema di Rolle* (dim.)
Controesempi al teorema di Rolle, se manca una delle sue ipotesi.
Teorema del valor medio o di Lagrange. Interpretazione geometrica.
Teorema di Cauchy (dim).
Conseguenze del teorema di Lagrange:
a) se f'(x)=0 per ogni x dell'intervallo I, allora f è costante in I.
L'importanza che I sia un intervallo.
Applicazione: arctan x + arctan (1/x) = $\pi/2$ per ogni x in]0,+∞[($-\pi/2$ per ogni x in]-∞,0[. arcsin x + arccos x= $-\pi/2$ per ogni x in [-1,1].
b) *Test di monotonia*: segno di f' in]a,b[e la monotonia di f in]a,b[.
L'importanza che I sia un intervallo.
Individuazione della natura dei punti critici usando la monotonia (segno della derivata nell'intorno dei punti critici)
Nota 14Lez Pag. 200-215

30/10/20 (2 ore): **Esercitazione:** derivabilità e calcolo delle derivate usando l'algebra. derivabilità usando corollario di Lagrange/de l'Hopital (con e senza parametri); derivata funzione composta (regola della catena); derivata funzione inversa; Retta tangente. Studio di funzioni.

03/11/20 (2 ore): Corollario del teorema di Lagrange – derivabilità in un punto.
Determinare, al variare di k in **R**, il numero delle soluzioni dell'equazione e^x-x=k.
Studio qualitativo della funzione $f(x)=|x|e^{-x^2}$; massimo e minimo di f su [0,2].
Oss: I punti estremi (max/min) locali di una funzione continua f:[a,b] ⟶**R** sono da ricercare tra i punti critici, i punti di non-derivabilità e gli estremi dell'intervallo.
Lasciato per esercizio: studio qualitativo delle funzioni f(x)=xlog x; $f(x)=((x^3-1)/x)^{1/2}$; f(x)= arctg(|x-1|/x). Attenzione ai punti con tangente verticale o punti angolosi.

Funzioni convesse (concave) e strettamente convesse (strett. concave). Rappresentazione grafica. Definizione di funzione convessa (concava) e strettamente convessa (strett. concava).
Esempio di funzione convessa che non è derivabile in qualche punto di I. Le funzioni potenze pari (visto per $f(x)= x^2$) sono funzioni strett. convesse in **R**.
Caratterizzazione delle funzioni convesse (strett. convesse) e derivabili su I.
Caratterizzazione delle funzioni convesse e derivabili 2 volte su I. Esempio: $f(x)=x^2$, $f(x)=e^x$ sono strettamente convesse su **R**. *Punto di flesso.*
Se f è derivabile due volte in un punto di flesso x_0 in]a,b[, allora $f''(x_0)=0$.
(non vale il viceversa: $f(x)=x^4$ in $x_0=0$).
Studio di funzione: schema per affrontare in generale lo studio qualitativo di una funzione. Studio qualitativo delle funzioni $f(x)=x-1+2/(1+|x|/2)$.

Forme indeterminate 0/0 e ∞/∞ e il *Teorema di de l'Hopital (dim. caso 0/0).*
Limiti vari (bisogna usare con oculatezza il teorema di de l'Hopital).
Attenzione: a) La non-esistenza del limite di $f'(x)/g'(x)$ non implica la non-esistenza del limite di $f(x)/g(x)$.
b) L'importanza di essere una forma indeterminata del tipo 0/0 e ∞/∞.
c) Non usare il teorema di de l'Hopital in modo ottuso!
Teorema di de l'Hopital (dim. caso 0/0). Esercizio.
Nota 15Lez Pag. 216-228

04/11/20 (2 ore): *Il problema dell'approssimazione di una funzione in un intorno di un punto mediante polinomi: polinomio di Taylor.*
Introduzione degli sviluppi di Taylor centrati nello zero delle funzioni elementari a partire dai limiti notevoli. Approssimazione di e^x vicino a $x_0=0$ con il polinomio di Taylor di ordine n: rappresentazione grafica per n=0, 1,..., n; approssimazione di sinx vicino a $x_0=0$ con il polinomio di Taylor di ordine 7.
Teorema (*Formula di Taylor con il resto di Peano*). *Polinomio di Taylor di ordine n associato ad f e centrato nel punto x_0*; è l'unico polinomio $P_{n,x\_0}(x)$ tale che $f(x)= P_{n,x\_0}(x) + o((x-x_0)^n)$; l'unico polinomio tale che la derivata di ordine k di P_{n,x_0} in x_0 è uguale alla derivata di ordine k di f in x_0. Esercizi.
Calcolo del polinomio di Taylor $P_{n,x\_0}(x)$ di ordine n centrato in $x_0=0$ delle seguenti funzioni: e^x, log(1+x), sinx, cosx, tgx, arctanx, $(1+x)^\alpha$.
Es. Calcolo di polinomi di Taylor di ordine 3 centrati in $x_0=0$ di qualche funzione composta. Calcolo di qualche limite usando gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari in $x_0=0$.
Nota 16Lez Pag. 229-240

06/11/20 (2 ore): **Esercitazione:** Studio di funzioni. Questioni di derivabilità.
Limiti con de l'Hopital. Limiti usando gli sviluppi di Taylor (con il resto di Peano).

07/11/20 (3 ore): Prima Prova Intermedia

10/11/20 (2 ore): Rappresentazione grafica dei polinomi di Taylor centrato in 0 per n=1, 3, 5, 7, 9, 13 della funzione esponenziale, delle funzioni seno/coseno, logaritmo.
Traccia di dim. del Teorema di Taylor con resto di Peano.
Calcolo del polinomio di Taylor con resto di Peano in punti $x_0 \neq 0$.
Individuazione del grafico di una funzione in un intorno di $x_0=0$ conoscendo il suo sviluppo di Taylor. Calcolo di limiti di forme indeterminate 0/0 in 0 (con parametro) usando gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari in $x_0=0$.
Teorema (*Formula di Taylor con il resto di Lagrange*) (enunciato). Dim. che $\cos x > 1-x^2/2$ per ogni x diverso da 0. Il numero di Nepero e come serie di 1/n!

Stime del valore di e (tramite l'uso dello sviluppo di Taylor di e^x, per x=1, con il resto di Lagrange). Stime del valore di e (tramite l'uso dello sviluppo di Taylor di e^x, per x=-1, con il resto di Lagrange). La funzione e^x come serie di $x^n/n!$ per ogni x in R.
Analogamente si ottiene lo sviluppo in serie delle funzioni trigonometriche su tutto R (funzioni analitiche). La funzione esponenziale complessa.
Nota 17Lez Pag. 241-252

11/11/20 (2 ore): Introduzione alle serie. Sommando infinite quantità positive possiamo ottenere una somma finita?
Motivazione euristica del fatto che $1+1/2+1/4+...+1/2^n +...$ abbia somma finita uguale a 2, e motivazione geometrica che $1/2+1/4+...+1/2^n +...$ abbia somma finita uguale a 1. Definizione di *serie numerica.* Notazione.
Successione delle *somme parziali.* Carattere di una serie (convergente, divergente, indeterminata o irregolare).

La serie $\Sigma 1/2^n$ come esempio di serie convergente e somma 2; la serie Σn come esempio di serie divergente positivamente; la serie $\Sigma(-1)^n$ come esempio di serie indeterminata.

La serie geometrica Σq^n. La serie $\Sigma 1/2^n$ come caso particolare.

Prova che 0.999... =1. La serie Σ1/(radice di n). Caso particolare della serie armonica generalizzata $\Sigma 1/n^\alpha$ per ogni α. La serie di Mengoli $\Sigma 1/[n(n+1)]$ come caso particolare delle serie telescopiche $\Sigma(b_n - b_{n+1})$.

La serie $\Sigma 1/n! = e$; La serie armonica $\Sigma 1/n$ è divergente (dim. di Nicola d'Oresme).

Commenti sul carattere della serie $\Sigma(a_n+b_n)$ a partire dal carattere delle serie Σa_n e Σb_n. Cosa succede per $\Sigma a_n b_n$? Serie convergenti di serie a termini complessi.
Criteri di convergenza per serie numeriche di segno qualsiasi:

Teorema: Condizione necessaria affinchè una serie Σa_n sia convergente, è che la successione $(a_n)_n$ sia infinitesima.

Tale condizione non è sufficiente: $\Sigma 1/n$ è una serie divergente nonostante 1/n sia un infinitesimo per n tendente a $+\infty$.

Criteri di convergenza per serie a termini non-negativi: *Criterio del confronto* (dim).

La serie armonica generalizzata $\Sigma 1/n^\alpha$ per ogni α (manca la dim. per $1<\alpha<2$) e la serie $\Sigma 1/[n^\alpha(\log n)^\beta]$.
Criterio del confronto asintotico (per serie a termini positivi) (dim.). Esercizi usando il criterio del confronto asintotico.
Criterio della radice n-esima e *criterio del rapporto* (solo accennato).
Nota 18Lez Pag. 253-268

13/11/20 (2 ore): **Esercitazione:** Calcolo di polinomi di Taylor di ordine 3, 4, 5 centrati in $x_0=0$ di qualche funzione composta. Determinazione della parte principale e dell'ordine di infinitesimo di un infinitesimo. Limiti usando gli sviluppi di Taylor (con il resto di Peano). Stime usando la formula di Taylor con resto di Lagrange.

17/11/20 (2 ore): *Criterio della radice n-esima* (con dim.). *Criterio del rapporto* (senza dim.).

Esercizi usando il criterio del confronto asintotico, il criterio della radice n-esima e il criterio del rapporto.
Serie a termini di segno variabile: serie assolutamente convergente. Criterio della convergenza assoluta (convergenza assoluta implica convergenza). La serie serie $\Sigma(-1)^n/n$ (esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente). La convergenza di tale serie segue dal criterio di Leibniz per le serie a segno alterno.
Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz. Esercizi.
Varie osservazioni sulla convergenza assoluta, convergenza (semplice) e il criterio di Leibniz. Esercizi vari usando il criterio di Leibniz.
Esempio di serie che non soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz ed è divergente; di serie che non soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz ma è convergente assolutamente; di serie che non soddisfa il criterio di Leibniz, che non è assolutamente convergente ma convergente (semplicemente).
Serie dipendenti da un parametro (o serie di funzioni). Esercizi.
Serie di potenze. Definizione e def. insieme di convergenza. La serie geometrica come caso particolare di una serie di potenze.
Nota 19Lez Pag. 269-281

18/11/20 (2 ore): Esercizio modello. Insieme di convergenza e raggio di convergenza.
Teorema: Se r è il raggio di convergenza della serie $\Sigma a_n(x-x_0)^n$, allora la serie converge assolutamente per ogni x tale che $|x-x_0|< r$, e non converge per ogni x tale che $|x-x_0|> r$. Nulla si può dire a priori sulla convergenza della serie nei punti $x = x_0 - r$ e $x= x_0 + r$.
Teorema: Criterio per la determinazione del raggio di convergenza per la serie $\Sigma a_n(x-x_0)^n$.
Esercizi sulla determinazione del raggio di convergenza di alcune serie di potenze. Determinazione dell'insieme di convergenza per serie di potenze o serie riconducibili a serie di potenze.
Serie di Taylor. Ogni serie di Taylor per funzioni $C^\infty(]a,b[)$ è convergente? Se essa è convergente, allora la sua somma coincide con la funzione stessa? Funzione sviluppabile in serie di Taylor. Le funzioni e^x, sinx, cosx, log(1+x) e arctanx sono sviluppabili in serie di Taylor con centro 0.
Integrazione – Integrale di Riemann. Introduzione:
a) il problema di trovare una buona definizione di 'area' per una regione piana sottografico di una funzione;
b) il problema di trovare un algoritmo facile per calcolare poi tale area.
Il problema della primitiva. Funzione integrale.
Archimede e il metodo di esaustione: calcolo dell''area' del sottografico di $f(x)=x^2$ sul segmento [0,b].
Nota 20Lez Pag. 282-289

20/11/20 (2 ore): **Esercitazione:** Esercizi sulle serie usando il criterio del confronto asintotico, il criterio della radice n-esima e il criterio del rapporto, criterio di Leibniz e la convergenza assoluta. Serie dipendenti da un parametro. Serie di potenze e serie riconducibili a serie di potenze.

24/11/20 (2 ore): *Integrale di Riemann.*
Suddivisione D di [a,b]. *Somma inferiore s(D,* f*) e somma superiore S(D,* f*).* Proprietà di *s(D,* f*) e S(D,* f*).*
Funzione integrabile (secondo Riemann). Integrale di Riemann per funzioni limitate su [a,b]. Esempio di funzione non-integrabile su [a,b] (la funzione di Dirichlet).
Caratterizzazione integrale (solo enunciato) e significato geometrico. L'integrale e l'area. Calcolo di qualche integrale usando l'interpretazione geometrica dell'integrale.

Classi di funzioni Riemann integrabili: le funzioni continue su [a,b] (dim.); le funzioni monotone su [a,b] (dim.); funzioni generalmente continue su [a,b].
Proprietà dell'integrale: linearità dell'integrale rispetto alla funzione integranda; monotonia, additività dell'integrale rispetto all'intervallo d'integrazione (formula di spezzamento).
Teorema della media integrale. Interpretazione geometrica. Legame tra il teorema della media integrale e la media aritmetica.
Integrale orientato.
Funzione primitiva. Definizione e qualche esempio. Osservazioni sulle primitive:

1) se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora anche $F(x)+c$ lo è per ogni $c\in\mathbf{R}$;

2) se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono due primitive di $f(x)$ su un intervallo I, allora $F_1(x)= F_2(x)+ c$.

Teorema di Torricelli-Barrow (dim.) (o primo teorema fondamentale del Calcolo Integrale) Esercizi. Legame tra integrale e derivata.
Nota 21Lez Pag. 290-303

25/11/20 (2 ore): *Funzione integrale* $F_c(x)$ *di* f *relativa ad un punto* c in I

Es: Sia f definita su [a,b]. Tracciare un grafico qualitativo di $F_a(x)$ usando l'interpretazione geometrica.
Teorema fondamentale del Calcolo Integrale (TFC): Se $f(x)$ è continua in I e $c\in I$, allora la funzione integrale $F_c(x)$ è una primitiva di f (dim.)
Oss: La funzione integrale ha sempre un grado di regolarità in più rispetto alla funzione integranda.
Es: Determinazione del grafico della funzione integrale $F_0(x)$ relativa alla funzione $f(x)=e^{-x^2}$ vicino a $x=0$.
Calcolo di limiti con la funzione integrale (usando de l'Hopital e gli sviluppi di Taylor). Derivata della funzione integrale con estremi funzioni di x.
Esercizi vari sulla funzione integrale (Polinomio di Taylor, punti critici e loro natura).
Oss.: Abbiamo visto che se $F(x)$ è una primitiva di una funzione continua $f(x)$ su I, allora $F(x)= F_a(x) + c$, dove $F_a(x)$ è la funzione integrale di f relativa al punto a in I. Questo fatto porta all'introduzione del concetto di *integrale indefinito* $\int f(x)dx$ come insieme di tutte le primitive di f rispetto alla variabile x.
Oss: Attenzione: non confondere i concetti di integrale definito di f (è un numero reale), di funzione integrale di f (è una funzione) e di integrale indefinito di f (è un simbolo che denota l'insieme delle funzioni primitive di f).
Tabella delle primitive immediate (e quasi).
Oss. Nonostante ogni funzione continua abbia sempre primitiva, non è detto che tale primitiva si possa esprimere mediante funzioni elementari. Es. e^{-x^2}, $(\sin x)/x$, $(\cos x)/x$, $\sin x^2$.
Esercizi vari: calcolo di integrali definiti immediati o quasi. Calcolo dell'area di un sottografico; calcolo di aree di regioni piane delimitate da grafici di funzioni.
Alcuni metodi utili per il calcolo di primitive:
Formula d'integrazione per parti; esercizi.
Formula d'integrazione per sostituzione; esercizi. Qualche sostituzione speciale ($t=\mathrm{tg}(x/2)$, ossia $x=2\mathrm{arctg}\ t$)
Nota 22Lez Pag. 304-315

27/11/20 (2 ore): **Esercitazione:** Funzione integrale. Integrali definiti immediati (o quasi). Calcolo dell'area di una regione piana. Integrazione per parti; integrazione per sostituzione.

01/12/20 (2 ore): Qualche sostituzione speciale ($x=\sinh t$). Integrazione di funzioni razionali (al denominatore polinomio di grado minore o uguale a 2).
Integrale di Riemann di funzioni limitati su intervalli]a,b].

Formula di Taylor con resto integrale (dim.) Stima del resto integrale per la funzione e^x centrato in 0. Stima del resto integrale per la funzione log(1+x) centrato in 0. Sviluppo in serie della funzione esponenziale e della funzione log(1+x). Calcolo della somma di alcune serie.
Integrali generalizzati (o impropri).
Integrazione per funzioni non limitate:

Esempi: integrabilità di $1/x^\alpha$ su]0,1]; integrabilità di $1/x^\alpha$ su [1,+∞[.
Nota 23Lez Pag.316-324

02/12/20 (2 ore): Funzione integrabile (in senso improprio o generalizzato) in [a,b[e integrale convergente (divergente positivamente, divergente negativamente, che non esiste). Analoghe definizioni su]a,b].

Esempi: integrabilità di $1/x^\alpha$ su]0,1]; più in generale di $1/(x-a)^\alpha$ su]a,b], di $1/(b-x)^\alpha$ su [a,b[. Esercizi. Integrabilità di $1/[x(-\log x)^\beta]$ su]0,1/2].
Integrazione per funzioni su intervalli illimitati: Funzione integrabile (in senso improprio o generalizzato) in [a,+∞[e integrale convergente (divergente positivamente, divergente negativamente, che non esiste). Analoghe definizioni su]-∞,b].

Esempi: integrabilità di $1/x^\alpha$ su [1,+∞[; integrabilità di $1/[x(\log x)^\beta]$ su [2,+∞[. Qualche studio di convergenza usando la definizione. Estensione del concetto di integrale generalizzato su]a,b[(possibilmente anche]-∞,+∞[). Esercizi.
Criteri di convergenza: *Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico.*
Esercizi. 'integrabilità della funzione gaussiana $e^{(-x^2)}$ su [0,+∞[.
Funzioni assolutamente integrabili. La funzione (sin x)/x è integrabile su]0,+∞[, ma non è assolutamente integrabile (stima dal basso con la serie armonica).
Ancora qualche esempio: $1/[x^\alpha(\log x)^\beta]$ è integrabile su [2,+∞[per ogni $\alpha>1$, β numero reale qualsiasi.
Esercizi sull'integrabilità usando il criterio del confronto e del confronto asintotico.
Nota 24Lez Pag. 325-336

04/12/20 (2 ore): **Esercitazione:** Calcolo dell'area di una regione piana dipendente da parametro. Integrazione di funzioni razionali (integrazione per parti; integrazione per sostituzione). Integrali generalizzati. Funzione integrale.

09/12/20 (2 ore): Esercizi sugli integrali generalizzati (assoluta integrabilità).
Serie e integrali generalizzati. Convergenza della serie armonica generalizzata
$\Sigma 1/n^\alpha$ se $\alpha > 1$. Convergenza della serie $\Sigma 1/[n(\log n)^\beta]$ se $\beta > 1$.
Esercizi vari sulla funzione integrale e limiti di somme.
Nota 25Lez Pag. 337-346

11/12/20 (2 ore): **Esercitazione:** Funzione integrale. Funzioni convesse/concave. Disuguaglianza di Jensen. Disuguaglianza di Young. Disuguaglianza di Hölder in $\mathbf{R}^n$. Confronto tra media aritmetica, quadratica, geometrica, armonica.

15/12/20 (2 ore): *Equazioni differenziali ordinarie di ordine* n. Eq. diff. in forma normale. Integrale generale di un'equazione differenziale.
Esempi di integrali generali: y'(x)=h(x); y'(x)=ay(x).
y'(x)=ay(x) (il modello di Malthus della dinamica di una popolazione isolata), y'(x)=2y(x)+x; y"(x)=x; y''(x)=-y.
Il problema di Cauchy per y'(x)=f(x,y(x)). Il problema di Cauchy per y"(x)=f(x,y(x),y'(x)).
Problema di Cauchy. Esempi di problemi di Cauchy.
Osservazioni: esistenza 'locale' (esistenza locale per y'(x)= $y^2(x)$ con y(0)=1) e non unicità della soluzione di un problema di Cauchy (y'(x)=3y^(2/3) con y(0)=0. Pennello di Peano).

Teorema: Esistenza ‘locale’ ed unicità di una soluzione di un problema di Cauchy (solo enunciato).
Nota 26Lez Pag. 347-357

16/12/20 (2 ore): *Metodo risolutivo per equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:* $y'(x)=h(x)g(y(x))$.
Esempi: integrale generale di $y'(x)=e^{-y(x)}$; $y'(x)=a(x)y(x)$; $y'(x)=-2x(y(x)-1)$.
Equazione logistica (lasciato come esempio). Modello di Verhulst (per lettura).

Metodo risolutivo per eq. diff. lineari del primo ordine a coefficienti variabili: $y'(x)=a(x)y(x)+b(x)$. Integrale generale dell’equazione omogenea. Integrale generale dell’equazione completa $y'(x)=a(x)y(x)+b(x)$ come somma dell’integrale generale dell’equazione omogena e di una soluzione particolare dell’equazione completa.
Esercizi: integrale generale di $y'(x)=2y(x)+x$; $y'(x)=(1/x)y(x)+x^2+1$; $y'(x)= -y+\sin x$.
L’integrale generale di $y'(x) + (\cos x/\sin x)y(x)-e^{-x}=0$; $y'(x) =1/(x^{(1/2)})y(x)+1$. (lasciati per esercizio).

Metodo risolutivo per eq. diff. lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: Caso omogeneo.
Nota 27Lez Pag. 358-369

18/12/20 (2 ore): **Esercitazione:** Equazioni differenziali a variabili separabili, lineari del primo ordine, lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee.

22/12/20 (2 ore): Esercizi: Integrale generale di $y''-4y'-5y=0$; $y''+6y'+9y=0$; $y''+2y'+5y=0$.

Metodi risolutivi per eq. diff. lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: Caso completo.
Metodo della variazione delle costanti.
Integrale generale di $y''+2y'+y=e^{-x}\log(1+x^2)$.
Integrale generale di $y''-2y'+y=(e^x)/(1+x^2)$.
Metodo della similarità.
Integrale generale di $y''-y =x^2+x$; $y''-y' =x^2+x$.
Problema di Cauchy e non solo.
Integrale generale di $y''-4y'+3y=3e^{2x}$; $y''-4y'+3y=4e^x$.
Integrale generale di $y''+y'+y=\sin(2x)$; $y''+y=3\cos x$.
Qualche altro esercizio; sistemi di equazioni differenziali del primo ordine.

Equazioni differenziali: qualche applicazione classica (lettura per le Feste!)
Es.1 Caduta di un grave senza resistenza dell’aria
Es.2 Caduta di un grave con resistenza dell’aria
Es.3 Oscillatore armonico semplice
Es.4 Oscillatore armonico smorzato forzato
Nota 28Lez Pag. 370-390

16/01/21 (3 ore): Seconda Prova Intermedia