2020-11-07 prima prova intermedia

1. Il limite $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-8x}-2\,|x|)$ è uguale a

   (a) $-\infty$
   (b) 0
   (c) $+\infty$
   (d) nessuno dei valori indicati nelle altre risposte

2. Il limite $\lim_{x\to1}\dfrac{x-x^2}{\sqrt{2-x}-1}$ è uguale a

   (a) 0
   (b) 2
   (c) 4
   (d) $+\infty$

3. Quanti dei limiti $\lim_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}-1}{\sin(x^2-x)}$, $\lim_{x\to0}\dfrac{4\tan x^2}{1-\cos(3x)}$, $\lim_{x\to0}\dfrac{\log(1+2x)}{\sin(3x)}$ sono minori o uguali a 1?

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3

4. Quanti dei limiti $\lim_{x\to0^+}(3x)^x$, $\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\log x}$ sono uguali a 0?

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3

5.

Siano a e b i due numeri reali per i quali la retta di equazione $y = ax+b$ è l'asintoto obliquo della funzione

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x}{2x + 1}$$

per $x \to -\infty$. Allora la somma $a + b$ appartiene all'intervallo

(a) $]-\infty, -1]$
(b) $]-1, 0]$
(c) $]0, 1]$
(d) $]1, +\infty[$

6.

Siano α e β i due numeri reali positivi per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \beta x + \dfrac{4}{3}\alpha^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{(1+x)^{2\alpha} - 1}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$. Allora il prodotto $\alpha\beta$ è uguale a

(a) $\frac{9}{2}$
(b) 3
(c) $\frac{3}{2}$
(d) nessuno dei valori indicati nelle altre risposte

7.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quale dei seguenti valori di α il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\arctan n}{n^\alpha}$$

è finito e diverso da 0?

(a) -1
(b) 0
(c) 1

(d) Nessuno dei valori indicati nelle altre risposte

8.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quale dei seguenti valori di α il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n \log\left(\cos\frac{1}{2^n}\right)$$

è finito e diverso da 0?

(a) -2
(b) 2
(c) 4
(d) Nessuno dei valori indicati nelle altre risposte

9.

Il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\log(1+e^n)}$$

appartiene all'intervallo

(a) $]-\infty, 0]$
(b) $]0, 3]$
(c) $]3, 10]$
(d) $]10, +\infty[$

10.

Sia

$$f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Quale delle seguenti affermazioni non è vera per $x \to 0$?

(a) $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$
(b) $f(x) = o(x)$
(c) $f(x) = x + o(x)$
(d) $f(x) = -x + o(1)$

11.

L'equazione $2^{-x} = x^2 + 2x$ ha una soluzione reale nell'intervallo $[-4, 4]$. Quale dei seguenti numeri approssima meglio tale soluzione?

(a) -3
(b) -1
(c) 1
(d) 3

12.

Sia
$$f(x) = |x-1| \arctan x.$$
Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

(a) La funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[0,1]$.
(b) La funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange su $[0,2]$.
(c) La funzione f ammette massimo su $]0,1[$.
(d) L'immagine di f è $\mathbb{R}$.

13.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $|f(x) + x| \leq 1$ in un intorno di $+\infty$. Allora
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

(a) vale -1
(b) vale 0
(c) vale 1
(d) vale $+\infty$

14.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Quante delle seguenti affermazioni sono vere?
1. Se f è strettamente negativa, allora $|f|$ è derivabile.
2. Se si ha $f'(0) = 0$, allora $|f|$ è derivabile in 0.
3. Se $|f|$ è derivabile in 0, allora si ha $f'(0) = 0$.

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

15.

Il numero complesso $(i-1)^{20}$ è uguale a

(a) 2^{10}
(b) 1
(c) -1
(d) -1024

16.

Le soluzioni complesse dell'equazione

$$(2i+3z)^2 = -9$$

(a) sono puramente immaginarie
(b) si trovano sull'asse reale
(c) hanno la medesima distanza dall'origine
(d) hanno lo stesso argomento

17.

Siano a un numero reale positivo e

$$f(x) = \log(1+x^2) - 2a \arctan x.$$

Quante delle seguenti affermazioni sono vere?
1. La funzione f è convessa nell'intervallo $[a-\sqrt{a^2+1}, a+\sqrt{a^2+1}]$.
2. La funzione f ha un punto critico per $x = a$.
3. La funzione f è crescente su $[a, +\infty[$ e decrescente su $]-\infty, a]$.
4. La funzione f è un infinitesimo di ordine 1, rispetto all'infinitesimo campione x, per $x \to 0$.

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

18.

Sia

$$A = \{(-1)^n \arcsin \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

Quante delle seguenti affermazioni sono vere?
1. L'unico punto di accumulazione per A è 0.
2. L'insieme A è costituito solo da punti isolati.
3. Si ha $\inf A = -\frac{\pi}{2}$ e $\sup A = \frac{\pi}{6}$.
4. L'insieme A contiene i propri punti di accumulazione.

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

19.

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x) = e^{1-x} - \pi x - 1,$$

g la funzione inversa di f e $y = ax + b$ l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto di ascissa $-\pi$. Allora si ha

(a) $a < 0$ e $b < 0$
(b) $a < 0$ e $b > 0$
(c) $a > 0$ e $b < 0$
(d) $a > 0$ e $b > 0$

20.

Siano $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni date da

$$f(x) = x^2 e^x, \quad g(x) = \log(1 + x^2) + |x| - 1, \quad h(x) = 2 + x \arctan x^3.$$

Quante delle funzioni f, g e h hanno un minimo assoluto in 0?

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3