Università degli Studi di Trento - Corso di Laurea Triennale in Matematica

Programma di ANALISI MATEMATICA A - a.a. 2020/21 - 15 CFU

docente: Prof.ssa Anneliese Defranceschi
e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it
homepage: http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

Periodo: Primo semestre 14/09/20-22/12/20 - Secondo Semestre 22/02/21-04/06/21

Lezioni primo semestre: martedì 10.30 - 12.30; mercoledì 15.30 - 17.30
Esercitazioni primo semestre: venerdì 8.30 - 10.30

Le indicazioni dei capitoli e dei paragrafi si riferiscono al libro:

C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 1. Zanichelli, 2015.

Per alcuni argomenti non svolti nel volume indicato sopra, le indicazioni si riferiscono ai libri:

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 2. Zanichelli, 2010
C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 2. Zanichelli, 2016.

L'ordine di elencazione è tematica e non corrisponde necessariamente all'ordine con cui gli argomenti vengono svolti a lezione.

Elementi di teoria degli insiemi - Cap. 1 Par. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

1: *Nozioni di logica matematica.* Proposizioni. Connettivi logici. Predicati. Quantificatori.
2: *Simboli e operazioni insiemistiche fondamentali.* Unione, intersezione, differenza e differenza simmetrica. Complementazione.
3: *Relazioni.* Prodotto cartesiano. Ordinamenti: definizioni di maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore.
4: *Funzioni.* Nozione intuitiva di funzione. Dominio, codominio, immagine. Funzioni particolari. Funzioni composte. Funzioni iniettive e suriettive. Funzioni inverse.
5: *Il principio di induzione.* Disuguaglianza di Bernoulli.
6: *Cenni di calcolo combinatorio* Formula del binomio di Newton.
7: *Insiemi infiniti (cenni).* Insiemi numerabili. Il prodotto di un insieme finito di insiemi numerabili è numerabile.

Insiemi numerici - Cap. 2 Par. 1, 2, 3, 4

1: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. I numeri naturali, i numeri interi relativi e i numeri razionali. Struttura di $\mathbb{Q}$ e rappresentazione dei numeri razionali.
2: *I numeri reali.* Cenni sulla definizione di numero reale come allineamento decimale. Ordinamento e struttura algebrica. Proprietà di completezza. Potenza del continuo.
3: *Radicali, potenze e logaritmi.* Radici n-esime aritmetiche. Potenze con esponente reale e logaritmi. Disuguaglianza triangolare.
4: *I numeri complessi.* Operazioni e struttura di campo. Forma algebrica. Coniugato, modulo e argomento. Forma trigonometrica ed esponenziale Potenze e radici.

Spazi euclidei - Cap. 3 Par. 1, 2

1: *Gli spazi euclidei* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{C}^n$. Spazi vettoriali lineari. Base e dimensione di uno spazio. Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$, norma in $\mathbb{R}^n$. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Angolo fra due vettori. Distanza in $\mathbb{R}^n$. Intorni sferici (circolari) di un punto in $\mathbb{R}^n$.

2: *Elementi di topologia in* $\mathbb{R}^n$. Punti interni, esterni e di frontiera. Punti di accumulazione e punti isolati. Insiemi aperti, chiusi e limitati. Unione e intersezione di famiglie di insiemi aperti e chiusi. Frontiera di un insieme. Chiusura di un insieme. **Teorema di Bolzano-Weierstrass**. Insiemi compatti. **Teorema di Heine-Borel**. Insiemi connessi e insiemi convessi.

L'operazione di limite - Cap. 4 Par. 1, 2, 3, 4

1: *Funzioni reali di variabile reale.* Positività e simmetrie. Funzioni pari e dispari. Funzioni limitate. Estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo (assoluto/locale) di una funzione. Funzioni monotone. Esempi: potenze, esponenziali e logaritmi.

2: *Limiti di funzioni da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$. Definizione di limite. Proprietà vere definitivamente. Limiti destro e sinistro. Limiti e ordinamento. Teorema di permanenza del segno. Teorema del confronto (dei "due carabinieri"). Algebra dei limiti. Esempi di non esistenza del limite. Esistenza del limite di una funzione composta. **Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone.** Infinitesimi e infiniti. I simboli o, O, $\sim$, $\asymp$ loro relazioni. Confronti fra infinitesimi e infiniti. Asintoti.

3: *Successioni a valori in* $\mathbb{R}$. Limite di una successione. Esempi: successione geometrica. Relazione fra limite di successioni e limite di funzioni. Il numero e. Alcuni limiti notevoli.
Esistenza del limite. Massimo limite, minimo limite e valore limite di una successione.
Esistenza del limite finito: criterio di Cauchy. Definizione di successione fondamentale. Teorema: criterio di convergenza di Cauchy.

4: *Limiti in* $\mathbb{C}$ *e limiti in* $\mathbb{R}^n$. Funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ e loro limiti. Esempi di non esistenza del limite. Successioni e topologia in $\mathbb{R}^n$. Le successioni convergenti sono limitate. Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente. Caratterizzazione degli insiemi chiusi e compatti utilizzando le successioni. Il criterio di Cauchy.

Funzioni continue - Cap. 5 Par. 1, 2, 3

1: *Funzioni continue da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$. Definizione di continuità. Continuità di $f+g$, $f\cdot g$, $1/f$, $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$. Continuità delle funzioni composte. Punti di discontinuità. **Teorema sulle possibili discontinuità di una funzione monotona**.
Proprietà delle funzioni continue su un intervallo. Teorema della permanenza del segno. **Teorema di esistenza degli zeri**. **Teorema dei valori intermedi**. **Teorema (di Weierstrass) di esistenza del massimo e del minimo di una funzione continua su un intervallo [a,b]**. La nozione di uniforme continuità. Esempi di funzioni continue non uniformemente continue.

2: *Funzioni continue da* $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}^m$. Caratterizzazione della continuà mediante controimmagine degli aperti (chiusi). Continuità delle funzioni lineari.
Funzioni continue su un compatto. Limmagine continua di un insieme compatto è un insieme compatto. Teorema (di Weierstrass) di esistenza del massimo e minimo. **Teorema (di Cantor-Heine) di uniforme continuità di una funzione continua su un compatto**.
Monotonia ed invertibilità. Continuità della funzione inversa di una funzione continua su un intervallo.

3: *Funzioni elementari.* Polinomi. Funzioni razionali, funzioni algebriche. Esponenziali e logaritmi. Funzioni iperboliche. Funzioni circolari (o trigonometriche) e loro inverse. Esponenziale complesso.

Calcolo differenziale 1. Funzioni reali di variabile reale - Cap. 6 Par. 1, 2, 3

1: *Derivata e differenziale.* Rapporto incrementale e suo significato geometrico. Definizione di derivata e di funzione derivabile. Retta tangente. Continuità delle funzioni derivabili. Esempi di funzioni continue e non derivabili. Punti angolosi, punti con tangente verticale e cuspidi. Derivate successive.
Algebra delle derivate. Linearità della derivata. Derivata delle funzioni elementari. Derivata di funzione composta. Derivata di funzione inversa.
Il differenziale.

2: *I teoremi fondamentali del calcolo differenziale.* Punto critico. Il **teorema di Fermat** e gli estremi locali di una funzione. **I teoremi di Rolle e di Cauchy. Il teorema di Lagrange**. Conseguenze del teorema di Lagrange: test di monotonia, riconoscimento della natura dei punti stazionari. Il teorema di de l'Hôpital.

La formula di Taylor con il resto di Peano, di Lagrange e con resto in forma integrale. Sviluppi di Mac Laurin di alcune funzioni elementari.

3: *Applicazioni del calcolo differenziale.* Funzioni convesse e concave. Punto di flesso.
Determinazione del grafico di una funzione.
Applicazioni della formula di Taylor: determinazione della natura dei punti stazionari; calcolo di ordini di infinito o infinitesimo; calcolo del valore approssimato di una funzione e stima dell'errore.

Calcolo differenziale 2. Funzioni reali di più variabili - Cap. 7 Par. 1, 2, 3

1: *Funzioni da* $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}$. Derivate direzionali e derivate parziali. Gradiente. Differenziale e funzioni differenziabili. Relazione fra derivabilità e differenziabilità. **Teorema di continuità e derivabilità delle funzioni differenziabili**.
Teorema (del differenziale totale): se f è di classe C^1 in un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, allora è differenziabile in ogni punto di A.
Derivate di ordine superiore. Teorema (di Schwarz) di uguaglianza delle derivate seconde miste. Matrice Hessiana.
Formula di Taylor.

2: *Funzioni a valori vettoriali.* Matrice Jacobiana. Esempi. Funzioni: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Curve e curve regolari. La retta tangente al supporto di una curva. Definizione di lunghezza di una curva. Curve rettificabili. Funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Piano tangente ad una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.
Differenziabilità di funzioni composte. La regola della catena: Jacobiano di una funzione composta.
Il teorema di inversione locale.

3: *Funzioni implicite.* Esempi di funzioni definite implicitamente. Il teorema del Dini in $\mathbb{R}^2$. Insiemi di livello e punti singolari. Ortogonalità di gradiente e linee di livello. Il teorema delle funzioni implicite in più di due variabili. Funzioni definite da un sistema di equazioni. L'analogo non lineare del teorema di Rouchè-Capelli.

Integrali di funzioni di una variabile. Serie numeriche - Cap. 8 Par. 1, 2, 3

1: *Integrale di Riemann.* Partizione di un intervallo, somme superiori, somme inferiori e definizione di integrale. Caratterizzazione dell'ntegrale e significato geometrico. Classi di funzioni integrabili. **Teorema: Integrabilità delle funzioni continue**. Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia, additività rispetto allintervallo di integrazione. **Teorema della media integrale**. Definizione di primitiva e proprietà. **Primo teorema fondamentale del calcolo integrale (o teorema di Torricelli-Barrow): calcolo dell'integrale per variazione di una primitiva**.
Funzione integrale. **Secondo teorema (o Il teorema) fondamentale del calcolo integrale**. Primitive e integrale indefinito. Tabella delle primitive.
Metodi di integrazione: integrazione per scomposizione, per parti e per sostituzione; integrazione di alcune funzioni razionali semplici.
Integrali dipendenti da un parametro. Continuità e formula di derivazione sotto il segno di integrale.

2: *Serie numeriche.* Definizione di serie e di somma di una serie. Serie convergenti, divergenti e irregolari. Proprietà elementari. Esempi di serie convergenti e divergenti: serie geometrica, serie telescopica, serie armonica e serie armonica generalizzata. Criterio di Cauchy di convergenza. Condizione necessaria di convergenza di una serie.
Serie a termini non negativi. Criterio del rapporto e della radice n-esima. **Criterio del confronto e del confronto asintotico**.
Convergenza e convergenza assoluta. Riordinamento di una serie. Teorema: se una serie è assolutamente convergente allora ogni suo riordinamento è convergente e ha la stessa somma.
Serie a segno alterno. Criterio di Leibniz di convergenza.
Serie di potenze. Serie di potenze e serie riconducibili a serie di potenze. Raggio di convergenza. Serie di Taylor.

3: *Estensioni dell'integrale di Riemann.* Integrali impropri: integrazione su insiemi illimitati e integrazione di funzioni illimitate.
Criteri di convergenza. Criterio del confronto e del confronto asintotico.
Serie numeriche e integrali impropri.

Equazioni differenziali Gli argomenti di questo capitolo si possono trovare in molti testi. Per esempio in M. Bramanti, C. Pagani, S. Salsa. Analisi Matematica 2", Cap. 1.

Modelli differenziali.

a) *Equazioni differenziali ordinarie (di ordine n) del primo ordine.* Definizione di soluzione. Problema di Cauchy. Integrale generale.
Equazioni a variabili separabili.
Equazioni lineari del primo ordine. Integrale generale.

b) *Equazioni lineari del secondo ordine.* Forma generale dellequazione e problema di Cauchy. Struttura dellintegrale generale nel caso di unequazione omogenea o non omogenea. Equazioni omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti. Equazione caratteristica. Metodo della variazione delle costanti. Metodo di similarità.

Massimi e minimi per funzioni di più variabili Gli argomenti di questo capitolo si possono trovare in molti testi. Per esempio in "C.D. Pagani, S. Salsa. Analisi Matematica 2, Zanichelli", Cap. 2.

Definizione di massimo/minimo locale. Estremi liberi. Condizioni necessarie. Punti stazionari e Teorema di Fermat in più variabili.
Forme quadratiche. Forme quadratiche definite positive o negative; forme quadratiche indefinite; forme quadratiche semidefinite. Massimo di una forma quadratica sul cerchio unitario.
Condizioni sufficienti per esistenza di un estremo libero. Formula di Taylor e studio della natura di un punto stazionario.
Estremi vincolati. Vincoli di uguaglianza in due variabili. Punto critico condizionato al vincolo $g(x, y) = 0$.

Esercizi: MOD1

- Estremo superiore/inferiore di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e di funzioni a valori reali
- Iniettvità/suriettività di funzioni di variabile reale. Funzione inversa e funzione composta
- Principio di induzione
- Numeri complessi: calcoli algebrici, risoluzione di equazioni in $\mathbb{C}$, radici n-esime e potenze. Rappresentazione grafica di semplici regioni del piano complesso individuate da equazioni o disequazioni
- Limiti di funzioni. Ordine di infinitesimo o di infinito. Comportamento asintotico
- Teorema degli zeri o del valor intermedio: esistenza di soluzioni di equazioni
- Continuità e derivabilità. Punti di non continuità e di non derivabilità. Derivate delle funzioni elementari. Equazione retta tangente/normale al grafico di una funzione in un punto del suo grafico
- Max/min di una funzione (uso del teorema di Fermat e i test di monotonia per trovare punti di massimo/minimo locale di una funzione e per determinarne la natura). Studio di funzioni o di una famiglia di funzioni di variabile reale dipendente da un parametro
- Studio del carattere di una serie (convergenza o non convergenza) usando i criteri di convergenza
- Limiti usando de l'Hôpital e gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari
- Integrali. Integrali definiti o primitive di funzioni elementari con luso, se necessarie, delle formule di integrazione per parti, per sostituzioni. Integrale di funzioni razionali semplici
- Area di semplici regioni piane.
- Andamento e rappresentazione grafica di semplici funzioni integrali
- Integrali impropri. Studio della convergenza di un integrale improprio usando i criteri di convergenza
- Equazioni differenziali. Problema di Cauchy

Esercizi: MOD2

- Riconoscere se un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$) aperto, chiuso. Individuare eventuali punti di frontiera, punti di accumulazione
- Individuare se un insieme convesso, connesso, compatto, limitato
- Domini, curve di livello per funzioni in pi variabili
- Limiti e continuit per funzioni in pi variabili
- Derivate parziali, differenziale, piano tangente

- Calcolo infinitesimale per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$)
- Lunghezza di una curva (integrali di linea)
- Polinomio di Taylor per funzioni in pi variabili
- Massimi/minimi per funzioni in pi variabili
- Teorema del Dini; retta tangente al grafico di una funzione definita implicitamente
- Massimi/minimi vincolati