2021-06-10 quarta prova intermedia

1. **2021-06-10-01**

   Sia $f(x, y) = \sqrt{3}(x - y)$ e sia $\mathcal{C}$ la curva data dall'equazione

   $$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0.$$

   Allora si ha $\min_{\mathcal{C}} f =$ ___ e $\max_{\mathcal{C}} f =$ ___ .

2. **2021-06-10-02**

   Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La funzione

   $$f(x, y) = \alpha x^2 - y^2 + 2\alpha^3 xy$$

   ha un punto critico in $P = (-1, 1)$ per $\alpha =$ ___ .

   Per tale valore di α stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   P è un punto di massimo locale per f. Vera / Falsa

   P è un punto di minimo locale per f. Vera / Falsa

   P è un punto di massimo assoluto per f. Vera / Falsa

   P è un punto di minimo assoluto per f. Vera / Falsa

   P è un punto di sella per f. Vera / Falsa

3. **2021-06-10-03**

   Sia $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva

   $$\mathbf{r}(t) = (t^2 + t + 1, t \sin |t|, 2t + 1).$$

   L'equazione parametrica della retta tangente alla curva nel punto $(1, 0, 1)$ è

   $$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = a + bs \\ z = c + ds \end{cases} \quad s \in \mathbb{R},$$

dove $a = \overline{}$, $b = \overline{}$, $c = \overline{}$, $d = \overline{}$.

4. **2021-06-10-04**

   Sia $\varrho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la curva polare data dall'equazione

   $$\varrho(\vartheta) = 2(1 - \cos\vartheta).$$

   Allora il vettore tangente alla curva in $(0, 2)$ è $(\overline{}, \overline{})$.

5. **2021-06-10-05**

   Sia $\mathcal{C}$ la curva piana data dall'equazione

   $$y^2 - 2y + 1 - x^2 + x^4 = 0$$

   e sia $P = (\frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{4})$ un punto su $\mathcal{C}$.
   L'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ in P è

   $$ax + b\sqrt{3}y + c\sqrt{3} - 1 = 0$$

   dove $a = \overline{}$, $b = \overline{}$, $c = \overline{}$.
   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.
   Il vettore $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ è ortogonale a $\mathcal{C}$ nel punto P. | Vera | Falsa |

   Il punto $(0, 1)$ è un punto singolare per $\mathcal{C}$. | Vera | Falsa |

6. **2021-06-10-06**

   Il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato in $(0, 0)$ della funzione

   $$x^2 - 2y + 6\sin(x + y^2)$$

   è

   $$x^2 - 2y + 6x + 6y^2 + ax^3 + bx^4 + cx^3y + dx^2y^2 + exy^3 + fy^4$$

   dove $a = \overline{}$, $b = \overline{}$, $c = \overline{}$, $d = \overline{}$, $e = \overline{}$, $f = \overline{}$.

7. **2021-06-10-07**

   Sia $f(x, y) = x(\log^2 y + x^2)$.

   Allora l'unico punto critico di f è $P = (\overline{}, \overline{})$, che è un punto di

massimo locale
minimo locale
sella

   .

   L'equazione del piano tangente al grafico di f in P è

   $$z = ax + by + c$$

   dove $a = \overline{}$, $b = \overline{}$, $c = \overline{}$.

8. **2021-06-10-08**

   Sia

   $$f(x, y) = y[x^2 - (y - 1)^2]$$

   e sia T il triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

   Allora $\max_T f = \overline{}$ e $3^3 \min_T f = \overline{}$.

   Stabilite inoltre per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   La funzione f ha un minimo locale stretto in $(0, \frac{1}{3})$.

Vera
Falsa

   I punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ sono gli unici punti critici di f e sono entrambi punti di sella.

Vera
Falsa

   La funzione f si annulla in tutti i suoi punti critici.

Vera
Falsa

9. **2021-06-10-09**

   Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

   $$\mathbf{f}(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{4}, \frac{x_2^3 - x_1 + x_2}{4}).$$

   La funzione $\mathbf{f}$

è
non è

   un diffeomorfismo locale in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.

Si ha inoltre

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(0, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dove $a = \overline{\quad}$, $b = \overline{\quad}$, $c = \overline{\quad}$, $d = \overline{\quad}$.

10. **2021-06-10-10**

    Siano $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni definite da

    $$\mathbf{f}(x, y) = (xy, y^2 x) \qquad \mathbf{g}(s, t) = (2s + t, t^2 - 2s).$$

    Allora si ha $\det J_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}(1, 1) = \overline{\quad}$.

11. **2021-06-10-11**

    Siano $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

    $$\mathbf{f}(t) = (t + t^2, -t) \qquad g(x, y) = x^2 + 3xy.$$

    Allora si ha $(g \circ \mathbf{f})'(1) = \overline{\quad}$.

12. **2021-06-10-12**

    Sia $\mathbf{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x^3 + 3xy, x + y)$.

    Allora si ha

    $\operatorname{div} \mathbf{f}(1, 1) = \overline{\quad}$,

    $\Delta f_1(1, 1) = \overline{\quad}$,

    $\sqrt{5} D_{\mathbf{v}} f_2(1, 1) = \overline{\quad}$ dove $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

13. **2021-06-10-13**

    Verificate che l'equazione

    $$e^{x-y} - x^2 + y^2 - e(x + 1) - 1 = 0$$

    definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $x_0 = 0$ tale che $\varphi(0) = -1$.

    Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

La funzione φ ha un minimo locale stretto in x_0.

Vera
Falsa

Si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)+1}{x^2} = \frac{1}{2}(\frac{e-2}{e+2})$.

Vera
Falsa

L'equazione definisce implicitamente una funzione $x = \psi(y)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $y_0 = -1$ tale che $\psi(-1) = 0$.

Vera
Falsa

14. **2021-06-10-14**

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(|x| + y^2)\log(x^2+y^2) & \text{su } \overline{B}_{\frac{1}{2}}(0,0) \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{in } (0,0). \end{cases}$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

Esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Vera
Falsa

Esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Vera
Falsa

f è differenziabile in $(0,0)$.

Vera
Falsa

f è continua in $(0,0)$.

Vera
Falsa

f ammette minimo e massimo.

Vera
Falsa

15. **2021-06-10-15**

Si consideri la funzione $f(x,y) = (x^2+y^2-2)(e^{1-x} - y)$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti tre affermazioni se è vera o falsa.

Il punto $(1,1)$ è un punto critico per f.

Vera
Falsa

Il punto $(1,1)$ è un punto di sella per f.

Vera
Falsa

Esiste un punto critico in $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 2\}$.

Vera
Falsa

Inoltre il numero di punti di minimo assoluto di f su ∂Q è ___.