2021-01-16 Seconda Prova Intermedia

1.

Siano

$$a = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\log(\sqrt{x}+1))}{\log(\sin x)} \qquad b = \lim_{x \to +\infty} x^2 \log\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}\right).$$

Allora si ha

(a) $a + b = 0$
(b) $4ab = 1$
(c) $a = b = +\infty$
(d) $ab < -1$

2.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\log(\cos \frac{1}{n})|^\alpha}{\sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3+n}}$$

è convergente se e solo se si ha

(a) $\alpha > \frac{1}{4}$
(b) $\alpha > \frac{1}{2}$
(c) $\alpha < \frac{1}{2}$
(d) $\alpha > 1$

3.

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi.
Quali delle seguenti due affermazioni sono necessariamente vere?
i) Se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente.
ii) Se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ è convergente, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

(a) Nessuna delle due
(b) Soltanto la prima
(c) Soltanto la seconda

(d) Entrambe

4.

Quali delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n n!}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{(2n)^n}$$

convergono per il criterio del rapporto?

(a) Nessuna
(b) Soltanto la prima
(c) Soltanto la seconda
(d) Entrambe

5.

Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e sia

$$F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\, dt.$$

Qual è il polinomio di Taylor di F di ordine 2 centrato in 1?

(a) $f(1)(x-1) + \frac{3f'(1)+2f(1)}{2!}(x-1)^2$
(b) $f(1) + f(1)(x-1) + \frac{3f'(1)+2f(1)}{2}(x-1)^2$
(c) $-f(1)(x-1) - \frac{3f'(1)+2f(1)}{2!}(x-1)^2$
(d) $F(1) + f(1)(x-1) + \frac{f'(1)}{2!}(x-1)^2$

6.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione concava. Quale delle seguenti tre affermazioni è falsa?
i) La funzione $x \mapsto f(-x)$ è concava su $\mathbb{R}$.
ii) Per ogni numero reale positivo a la funzione $x \mapsto af(x)$ è concava su $\mathbb{R}$.
iii) La funzione composta $f \circ f$ è concava su $\mathbb{R}$.

(a) La prima
(b) La seconda
(c) La terza
(d) Nessuna delle tre

7.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}|x - 4x^{-1}|^{\alpha/2}}$$

risulta convergente se e solo se si ha

(a) $\alpha > -1$
(b) $-1 < \alpha < 2$
(c) $\alpha > 1$
(d) $1 < \alpha < 2$

8.

L'uguaglianza

$$\int_0^1 f(x)\, dx + \int_0^1 x f'(x)\, dx = 0$$

vale

(a) per ogni $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$
(b) per ogni $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ con $f(0) = 0$
(c) per ogni $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ con $f(1) = 0$
(d) soltanto per $f(x) = -x + 1$

9.

L'integrale

$$A = \int_1^e \frac{1}{2x + |\log^2 x - 2|x}\, dx$$

è

(a) divergente
(b) uguale a $\frac{\log 3}{4}$
(c) uguale a $\frac{e-1}{e}$
(d) uguale a $\frac{1}{4}\log(\frac{2+e}{2-e})$

10.

Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{|\cos t|}{1 + t^2}\, dt.$$

Quante delle seguenti quattro affermazioni sono vere?
i) La funzione F è dispari su $\mathbb{R}$.
ii) Si ha $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
iii) La funzione F ha un asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$.
iv) La funzione F ha infiniti punti di flesso con tangente orizzontale al grafico in tali punti.

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

11.

Per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\alpha} \int_{x-x^2}^{x} \arctan t^2 \, dt$$

esiste finito diverso da 0?

(a) $\alpha = 1$
(b) $\alpha = 2$
(c) $\alpha = 3$
(d) $\alpha = 4$

12.

Sia

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} \, dx.$$

Allora si ha

(a) $A \leq 0$
(b) $0 < A \leq \frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{2} < A \leq 2$
(d) $A > 2$

13.

Quale dei seguenti problemi di Cauchy ha una soluzione illimitata inferiormente su $]-\infty, 1[$?

(a) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

14.

Sia $\hat{y}(x)$ l'unica funzione a valori reali definita su $]0, +\infty[$ che risolve l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} + x \arctan x$$

e per la quale esiste finito il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\hat{y}(x) - 2 \sin x}{x^3}.$$

Allora tale limite è uguale

(a) 0
(b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{5}{6}$
(d) nessuno dei valori proposti

15.

Per quanti valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \cos(\alpha x)$$

è costituito da funzioni illimitate su $\mathbb{R}$?

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) Più di 2