2021-04-17 terza prova intermedia-senza risposte

1.

Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = 2x + 1, \qquad g(x) = -3x^2.$$

Allora si ha $\|f - g\|_\infty =$ ___ e $\|f - g\|_1 =$ ___ .

2.

Sia $(f_n)_{n>0}$ la successione di funzioni continue su $[0,1]$ definita da $f_n(x) = x^n$ e sia f la funzione identicamente nulla su $[0,1]$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

Si ha $\lim_{n\to+\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$.

Vera
Falsa

Si ha $\lim_{n\to+\infty} d_1(f_n, f) = 0$.

Vera
Falsa

Si ha $\lim_{n\to+\infty} d_p(f_n, f) = 0$ per $1 < p < +\infty$.

Vera
Falsa

3.

Sia $f(x, y) = \log(x^2 - y)$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

L'insieme di definizione A di f è un insieme aperto e connesso per poligonali.

Vera
Falsa

L'immagine di f è $\mathbb{R}$.

Vera
Falsa

La funzione f ha due punti di massimo su $\overline{B}_{1,d_\infty}(0, -2)$.

Vera
Falsa

La funzione f ha un solo punto di minimo su $\overline{B}_{1,d_\infty}(0, -2)$.

Vera
Falsa

L'insieme $f^{-1}(\{0\})$ è compatto in $\mathbb{R}^2$.

Vera
Falsa

4.

Sia $f(x) = \sqrt{x}$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

La funzione f è lipschitziana su $]2, +\infty[$. $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$

La funzione f è uniformemente continua su $]2, +\infty[$. $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$

La funzione f è lipschitziana su $[0, +\infty[$. $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$

La funzione f è uniformemente continua su $[0, +\infty[$. $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$

5.

Sia $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

La funzione f è lipschitziana su $]0, 1[$. $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$

La funzione f è uniformemente continua su $]0, 1[$. $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$

La funzione f è lipschitziana su $]1, +\infty[$. $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$

La funzione f è uniformemente continua su $]1, +\infty[$. $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$

6.

Siano $A = [0,2] \cup \{3\}, \quad B =]0,2], \quad C =]0,1[\cup]1,2[, \quad D = \{0,2\}$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti uguaglianze se è vera o falsa.

$A = \mathring{A}$ $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$ $A = \overline{A}$ $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$ $\partial A = D$ $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$

$B = \mathring{B}$ $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$ $B = \overline{B}$ $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$ $\partial B = D$ $\begin{array}{|c|}\hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$

$C = \mathring{C}$ | Vera / Falsa | $C = \overline{C}$ | Vera / Falsa | $\partial C = D$ | Vera / Falsa

$D = \mathring{D}$ | Vera / Falsa | $D = \overline{D}$ | Vera / Falsa | $\partial D = D$ | Vera / Falsa

7.

Sia A l'insieme di definizione di $f(x) = \arcsin(\dfrac{x}{x^2+y^2})$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A è connesso per poligonali. | Vera / Falsa

A è limitato. | Vera / Falsa

A è chiuso. | Vera / Falsa

La retta di equazione $x = 0$ è contenuta in A. | Vera / Falsa

8.

Sia A l'insieme di definizione di $f(x,y) = \dfrac{\log(2-x^2+x)}{\sqrt{y-x^2}}$ e sia $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x+2\}$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A è aperto. | Vera / Falsa

$\{(-1,y) : y \geq 1\} \subseteq \partial A$. | Vera / Falsa

$A \cap B$ è convesso. | Vera / Falsa

$\overline{A} \cap \overline{B}$ è compatto. | Vera / Falsa

L'origine è un punto di accumulazione per A. | Vera / Falsa

Si ha sia $(0,1) \notin \partial A$ sia $(0,2) \notin \partial B$.

Vera
Falsa

9.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $\mathbf{x_0} \in A$. Allora

esiste una successione $(\mathbf{x}_h)_h \subseteq A$ tale che $\lim_{h \to +\infty} \mathbf{x}_h = \mathbf{x_0}$

Vera
Falsa

$\exists B_r(\mathbf{x_0}), r > 0 : B_r(\mathbf{x_0}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$

Vera
Falsa

$\forall r > 0, A \cap B_r(\mathbf{x_0})$ è convesso

Vera
Falsa

$\mathbf{x_0} \notin \partial A$

Vera
Falsa

10.

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione definita da $x_n = \sqrt{2} \sin \dfrac{n\pi}{4}$.

Allora si ha $\liminf_{n \to +\infty} x_n =$ ___ e $\limsup_{n \to +\infty} x_n =$ ___.

11.

Il limite $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x \arctan y}{x^2 + y^2}$

(a) è uguale a 0
(b) è uguale a 1
(c) non esiste
(d) è uguale a 1/2

12.

Il limite $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} \frac{x \arctan^2 y}{x^2 + y^2}$

(a) è uguale a 0
(b) è uguale a $+\infty$
(c) non esiste
(d) è uguale a $\pi/2$

13.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|x|}y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

f ammette massimo e minimo su $\overline{B}_1(\mathbf{0}) \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1/2\}$.

Vera
Falsa

Esiste il limite $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x, y)$.

Vera
Falsa

f è limitata superiormente.

Vera
Falsa

f è limitata inferiormente.

Vera
Falsa

14.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

f è continua, ma non è derivabile in $(0, 0)$.

Vera
Falsa

f è derivabile, ma non è continua in $(0, 0)$.

Vera
Falsa

f è continua e derivabile in $(0, 0)$.

Vera
Falsa

f è derivabile in $(0, 0)$ lungo tutte le direzioni.

Vera
Falsa

15.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+\sin|x-y|}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Allora f è derivabile in $(0,0)$

(a) lungo tutte le direzioni
(b) solo lungo le direzioni $\mathbf{e_1}$ ed $\mathbf{e_2}$
(c) solo lungo le direzioni $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$

16.

Per quale valore di ϑ la direzione $v = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ è quella lungo cui è massima la crescita della funzione $f(x,y) = (x+y^2)\log(x-y)$ nel punto $(1,0)$?

(a) $\vartheta = \pi/4$
(b) $\vartheta = -\pi/4$
(c) $\vartheta = 3\pi/4$
(d) $\vartheta = 0$

17.

Sia $f(x,y) = \sin(xy) - 2x^2y + 1$.
L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0,1)$ è

$z = ax + by + c$ con $a =$ ___ $b =$ ___ e $c =$ ___ .
Un vettore normale al grafico di f nel punto $(1,0,1)$ è

- $(0,-1,-1)$
- $(-1,0,-1)$
- $(-1,-1,0)$