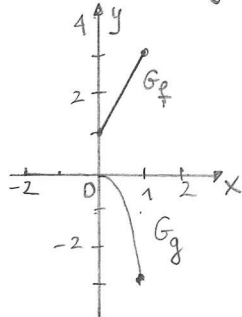


1) Siano $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2x+1$, $g(x) = -3x^2$



• $\|f-g\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)-g(x)| = \underline{6}$ ↑ segue subito graficamente!

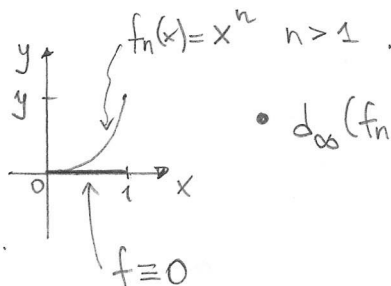
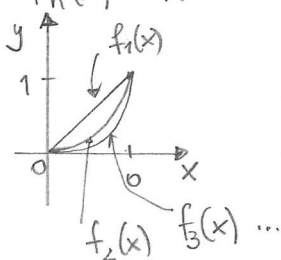
Si può anche oss. che $f(x)-g(x) = 2x+1+3x^2$ su $[0,1]$

funzione positiva e strett. crescente, quindi

$\max_{x \in [0,1]} |f(x)-g(x)| = \max_{x \in [0,1]} (f(x)-g(x)) = f(1)-g(1) = 6.$

• $\|f-g\|_1 = \int_0^1 |f(x)-g(x)| dx = \int_0^1 (f(x)-g(x)) dx = \int_0^1 (2x+1+3x^2) dx$
 $= \left[x^2 + x + x^3 \right]_0^1 = \underline{3}.$

2) $f_n(x) = x^n$



• $d_{\infty}(f_n, f) = \max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

$= \max_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \max_{x \in [0,1]} f_n(x) = 1 \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{\infty}(f_n, f) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{\infty}(f_n, f) = 0 \quad (\text{F})$

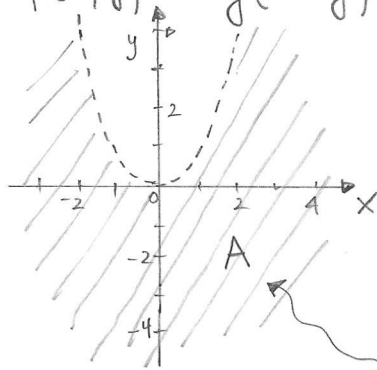
• $d_1(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d_1(f_n, f) = 0 \quad (\text{V})$

• $d_p(f_n, f) = \left(\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 (x^n)^p dx \right)^{1/p} = \left(\left. \frac{x^{np+1}}{np+1} \right|_0^1 \right)^{1/p}$
 $= \left(\frac{1}{np+1} \right)^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (per la continuità della funzione $x^{1/p}$ su $[0, +\infty[$)

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d_p(f_n, f) = 0 \quad (\text{V})$

3) $f(x,y) = \log(x^2 - y)$; • $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y > 0\}$
 $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$



posto $g(x,y) = y - x^2$ funz. continua su $\mathbb{R}^2$

mi ha $A = g^{-1}(]-\infty, 0[)$

e quindi A è un insieme aperto.

Dal disegno possiamo dedurre che A

è connesso per poligonalità.

(V)

• Oss. che f è una funzione continua ;

$\forall x \neq 0 \quad f(x,0) = \log x^2$; quindi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = -\infty$.

Risulta $\inf_A f = -\infty$.

D'altra parte $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x^2 = +\infty$; quindi $\sup_A f = +\infty$.

Essendo f continua su un dominio connesso per poligonalità, f assume tutti i valori tra $\inf f$ e $\sup f$; risulta che

$f(A) = \mathbb{R}$ (V).

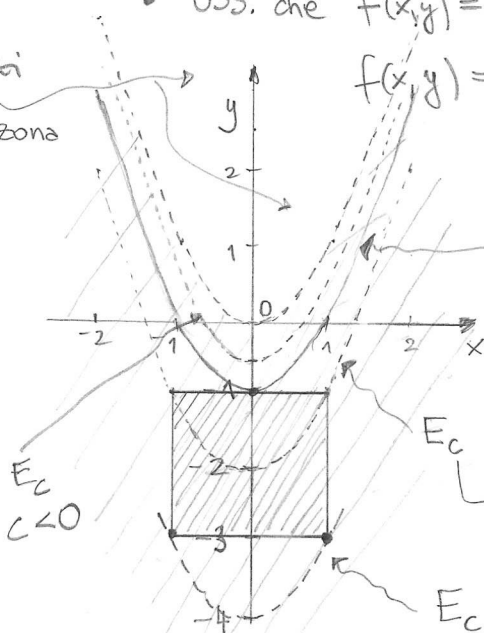
• Oss. che $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y = 1$ cioè $y = x^2 - 1$

$f(x,y) = c \Leftrightarrow x^2 - y = e^c$, cioè $y = x^2 - e^c$
 $c < 0 \Rightarrow 0 < e^c < 1$

$c > 0 \Leftrightarrow x^2 - y = e^c$, cioè $y = x^2 - e^c < -1$

$E_0 = \{(x,y) \in A : f(x,y) = 0\}$

i punti di questa zona $\notin A$



E_c
 $c < 0$

E_c $c > 0$
 $\rightarrow$ per $c = \log 2$

E_c
 $\rightarrow$ per $c = \log 4$

$\min f = 0$
 $\bar{B}_{1,d_\infty}(0,-2)$

pt. di min (0,-1)

$\max f = \log 4$
 $\bar{B}_{1,d_\infty}(0,-2)$

pt. di max (-1,-3)
(1,-3)

Quindi f ha due pt. di massimo su $\overline{B}_{1,d_\infty}(0,-2)$ (V).

f ha un solo pt. di minimo su $\overline{B}_{1,d_\infty}(0,-2)$ (V).

- Notiamo che $f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in A : f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in A : y = x^2 - 1\}$

Questo insieme è chiuso, ma non limitato; quindi non è compatto (vedi teorema di Heine-Borel). Quindi;

L'insieme $f^{-1}(\{0\})$ è compatto in $\mathbb{R}^2$ (F). ■

4) $f(x) = \sqrt{x}$

- f è lipschitziana su $]2, +\infty[$ (V).

Segue dal teorema di Lagrange: fissati $x, y \in]2, +\infty[$ si ha

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq |x - y| \quad (f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0)$$

$$\uparrow$$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \forall x > 2$$

Per l'arbitrarietà di x, y segue quanto si vuole.

- f è uniformemente continua su $]2, +\infty[$ (V).

Essendo f lipschitziana su $]2, +\infty[$, risulta u.c. su $]2, +\infty[$.

- f è lipschitziana su $[0, +\infty[$ (F).

Oss. che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$; quindi f non può avere rapporto incrementale limitato su $[0, +\infty[$.

- f è uniformemente continua su $[0, +\infty[$ (V).

Infatti, f è unif. continua su $[0, 1]$ per il teorema di Heine-Canthor; inoltre è lipschitziana, quindi u.c., su $[1, +\infty[$. ■

5) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$

- f è lipschitziana su $]0, 1[$ (F).

Oss. che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$; quindi f non può avere rapporto incrementale limitato su $]0,1[$.

- f è u.c. su $]0,1[$ (F)

f è continua ma non limitata sull'intervallo limitato!

- f è lipschitziana su $]1,+\infty[$ (V)

Infatti ha la derivata limitata su $]1,+\infty[$.

- f è uniformemente continua su $]1,+\infty[$ (V)

f è lipschitziana su $]1,+\infty[$. Possiamo anche semplicemente oss. che f è continua su $]1,+\infty[$ e ha asintoto orizz. $y=1$ per $x \rightarrow +\infty$; quindi è u.c. su $]1,+\infty[$. ■

6) $A = [0,2] \cup \{3\}$, $B =]0,2[$, $C =]0,1[\cup]1,2[$, $D = \{0,2\}$.

- Abbiamo $\overset{\circ}{A} =]0,2[\Rightarrow A = \overset{\circ}{A}$ (F)

$$\bar{A} = [0,2] \cup \{3\} \Rightarrow A = \bar{A} \text{ (V)}$$

$$\partial A = \{0,2,3\} \Rightarrow \partial A = D \text{ (F)}.$$

- Abbiamo $\overset{\circ}{B} =]0,2[\Rightarrow B = \overset{\circ}{B}$ (F)

$$\bar{B} = [0,2] \Rightarrow B = \bar{B} \text{ (F)}$$

$$\partial B = \{0,2\} \Rightarrow \partial B = D \text{ (V)}.$$

- Abbiamo $\overset{\circ}{C} =]0,1[\cup]1,2[\Rightarrow C = \overset{\circ}{C}$ (V)

$$\bar{C} = [0,2] \Rightarrow C = \bar{C} \text{ (F)}$$

$$\partial C = \{0,1,2\} \Rightarrow \partial C = D \text{ (F)}.$$

- Abbiamo $\overset{\circ}{D} = \emptyset \Rightarrow D = \overset{\circ}{D}$ (F)

$$\bar{D} = \{0,2\} \Rightarrow D = \bar{D} \text{ (V)}$$

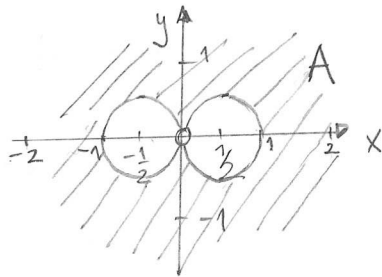
$$\partial D = \{0,2\} \Rightarrow \partial D = D \text{ (V)}.$$
 ■

7) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : -1 \leq \frac{x}{x^2+y^2} \leq 1\}$$

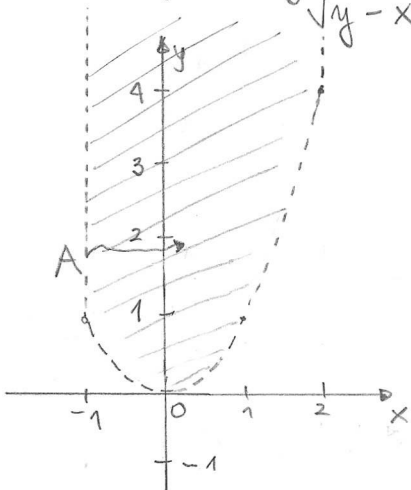
$$\Rightarrow A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : x^2 + y^2 + x \geq 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : x^2 + y^2 - x \geq 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}\}$$



- A è connesso per poligonalità (V) (vedi dal disegno)
- A è limitato (F)
- A è chiuso (F) 0 è un pt. di accum. di A, $0 \notin A$.
- La retta di eq. $x=0$ è contenuta in A (F). ■

8) $f(x,y) = \frac{\log(2-x^2+x)}{\sqrt{y-x^2}}$



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2-x^2+x > 0, y > x^2\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-x-2 < 0, y > x^2\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 2, y > x^2\}$$

- A è aperto : posto $g(x,y) = -x^2+x+2$ $\left. \begin{array}{l} \text{funz. continue} \\ h(x,y) = y-x^2 \end{array} \right\}$ (V)
possiamo scrivere $A = g^{-1}(]0, +\infty[) \cap h^{-1}(]0, +\infty[)$
l'intersezione di due aperti è un aperto.

• $\{(-1, y) : y \geq 1\} \subseteq \partial A$ (V)

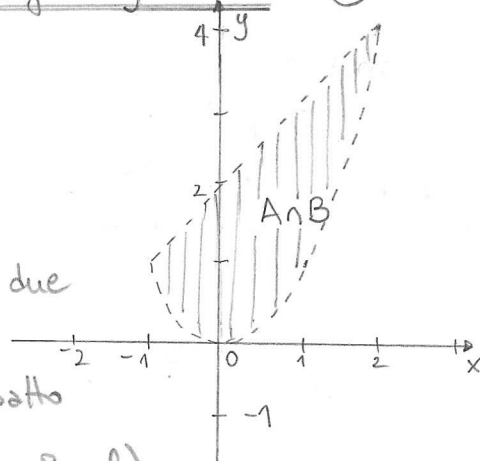
- $A \cap B$ è convesso (V)

- $\bar{A} \cap \bar{B}$ è compatto (V)

è chiuso (intersezione di due chiusi)

è limitato, quindi compatto

(per il teorema di Heine-Borel).



- L'origine è un pt. di accumul. per A (V)

Infatti $\forall r > 0$ si ha $B_r(0) \cap A \setminus \{0\} \neq \emptyset$

- si ha sia $(0,1) \notin \partial A$ sia $(0,2) \notin \partial B$ (F), poiché $(0,2) \in \partial B$.

9) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$. Allora

- esiste una succ. $(x_n)_n \subseteq A$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ (V)

A è aperto, $x_0 \in A$, quindi $\exists B_r(x_0) \subset A$.

Preso allora la t.c. $\frac{1}{n} < r$ e $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$ mi ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

- esiste $B_r(x_0)$, $r > 0$: $B_r(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$ (V)

Infatti, essendo $x_0 \in A$, A aperto, $\exists B_r(x_0)$ t.c.

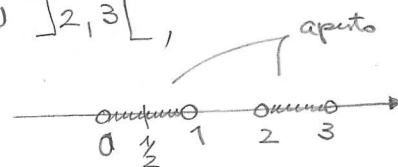
$B_r(x_0) \subset A$ e quindi $B_r(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$.

- $\forall r > 0$, $A \cap B_r(x_0)$ è connesso (F)

basta prendere per es. $A =]0,1[\cup]2,3[$,

$x_0 = \frac{1}{2}$, allora $B_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}) \cap A = A$

che non è connesso!



- $x_0 \notin \partial A$ (V) per definizione di pt. di frontiera e $x_0 \in A$ aperto.

10) $x_n = \sqrt{2} \sin \frac{n\pi}{4}$; al variare di $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in \{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$

Risulta $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\sqrt{2}$

$$\begin{cases} x_n \geq -\sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{6+8k\pi} = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} x_n \leq \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2+8k\pi} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

11) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \arctan y}{x^2 + y^2}$

$f(x,y)$

$\forall x \neq 0 \quad f(x,0) = 0$;

ma $\forall x \neq 0$

$f(x,x) = \frac{x \arctan x}{2x^2} = \frac{\arctan x}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \nexists$

Risposta: (C).

$$12) \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan^2 y}{x^2 + y^2}.$$

$$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad 0 \leq \left| \frac{x \arctan^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{|x|}{x^2 + y^2} \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$\downarrow \|(x,y)\| \rightarrow +\infty$
0

$$\Rightarrow \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Risposta: (a).

$$13. f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|} y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

• f è continua in 0 : $0 \leq |f(x,y)| = \frac{\sqrt{|x|} y^2}{x^2 + y^2} \leq \sqrt{|x|}$
 $\downarrow (x,y) \rightarrow (0,0)$
 0

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

$\overline{B}_1(0) \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{2}\} = \overline{B}_1(0) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{1}{2}\}$ chiuso e limitato; quindi compatto. Per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su $\overline{B}_1(0) \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{2}\}$. La risposta corretta è (V)

• $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y) \quad \forall x \quad f(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x,0) = 0.$
 quindi se il limite $\exists$ deve valere 0.

D'altra parte $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{|x|} x^2}{2x^2} = +\infty,$

e quindi $\nexists \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y).$ La risposta corretta è (F).

- f non è limitata superiormente : $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty.$ La risposta corretta è (F)
- f è limitata inferiormente : (V) infatti $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

$$14. f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- f è continua, ma non è derivabile in $(0,0)$: (F)

$$\begin{aligned} \forall x, \quad f(x,0) &= 0 \\ \forall y, \quad f(0,y) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

f è derivabile in $(0,0)$.

- f è derivabile, ma non continua in $(0,0)$: (F)

$$f \text{ è continua in } (0,0) : \quad 0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{|x|y^2}{x^4+y^2} \leq |x| \quad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

- f è continua e derivabile in $(0,0)$: (V) (vedi sopra).

- f è derivabile in $(0,0)$ lungo tutte le direzioni: (V)

Infatti, $\forall \underline{v} = (v_1, v_2), \quad \|\underline{v}\| = 1$

$$\forall t \neq 0 \quad \frac{f(t\underline{v}) - f(0)}{t} = \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^3 (t^2 v_1^4 + v_2^2)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} v_1 \quad \text{se } v_2 \neq 0$$

$$\Rightarrow D_{\underline{v}} f(0) = \begin{cases} v_1 & \text{se } v_2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } v_2 = 0. \end{cases}$$

$$15) f(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{\sin|x-y|}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\forall \underline{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \|\underline{v}\| = 1$$

$$\forall t \neq 0 \quad \frac{f(t\underline{v}) - f(0)}{t} = \frac{\sin t \|\underline{v}_1 - \underline{v}_2\|}{t^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\underline{v}) - f(0)}{t} \exists \text{ finito} \Leftrightarrow \|\underline{v}_1 - \underline{v}_2\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2 \quad \|\underline{v}\| = 1.$$

Risulta che f è derivabile solo lungo le direzioni $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Risposta: (C)

16) $f(x,y) = (x+y^2) \log(x-y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \log(x-y) + \frac{x+y^2}{x-y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \log(x-y) - \frac{x+y^2}{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -1.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sono continue in $(1,0)$. f è differenziabile in $(1,0)$ e $\nabla f(1,0) \neq (0,0)$; la direzione di massima crescita in $(1,0)$ è individuata da $\underline{v} = \frac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Da

$$(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

segue $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Risposta: (b).

17. $f(x,y) = \sin(xy) - 2x^2y + 1$

f è differenziabile in $(1,0)$ (tutte le derivate parziali sono e sono continue in $(1,0)$). L'eq. del piano tangente al grafico di f nel pt $(1,0,1)$ è $z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0)$.

ora $\nabla f(x,y) = (y \cos(xy) - 4xy, x \cos(xy) - 2x^2) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

e quindi

$$\nabla f(1,0) = (0, -1).$$

Risulta

$$z = 1 + 0 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-0),$$

ma

$$\underline{z = -y + 1}.$$

$$z = ax + by + c$$

$$\underline{\text{con } a=0, b=-1, c=1.}$$

Un vettore normale al grafico di f in $(1,0,1)$ è $\underline{n} = (\nabla f(1,0), -1)$ oppure $\underline{n} = -(\nabla f(1,0), -1)$. Abbiamo $(\nabla f(1,0), -1) = (0, -1, -1)$ e quindi $\underline{n} = (0, -1, -1)$ è un vettore normale al grafico di f in $(1,0,1)$. ■