Università degli Studi di Trento — Dip. di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica
Test di autovalutazione di ANALISI MATEMATICA A / ANALISI MAT 1
a.a. 2020/21 — 12 ottobre 2020

1. (a) $\{x\in\mathbb{R} : \frac{1}{x^2} < 1\} =]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$

$\frac{1}{x^2}<1 \iff \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2>1 \end{cases} \iff]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$

(b) $\{x\in\mathbb{R} : x^2>3\} =]-\infty,-\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{3},+\infty[$

(c) $\{x\in\mathbb{R} : |x+1|<1\} =]-2,0[$

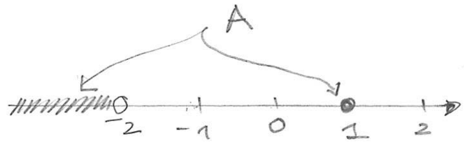
$|x+1|<1 \iff -1<x+1<1 \iff -2<x<0$

(d) $\{x\in\mathbb{R} : |x|>0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

■

Risposta: (c).

2. $A =]-\infty,-2[\,\cup\,\{1\}$



(a) $\forall M\in\mathbb{R}, \exists x\in A : x\le M$ (V) :
- infatti se $M\ge 1$, allora $\forall x\in A$ si ha $x\le M$
- se $-2\le M<1$, allora $x=-3\in A$ e $-3\le M$ (come esempio)
- se $M<-2$, basta prendere per es. $x=M-1\in A$ e $x\le M$.

□

(b) $\forall M\in\mathbb{R}, \exists x\in A : x\ge M$ (F) : basta prendere $M>1$, per es. $M=2$ e $\forall x\in A$ $x<M$.

(c) $\exists M\in A : \forall x\in\mathbb{R}, x\ge M$ (F) : Infatti è vera la sua negazione ossia $\forall M\in A\ \exists x\in\mathbb{R} : x<M$.

Se $M=1$, basta prendere $x=-3$ (per es.)
Se $M<-2$, basta prendere $x=M-1$ (per es.)

(d) $\exists M\in A : \forall x\in\mathbb{R}, x\le M$ (F) : Infatti è vera la sua negazione, ossia $\forall M\in A, \exists x\in\mathbb{R} : x>M$.

Preso un qualsiasi $M\in A$, basta prendere per es. $x=2$.

■

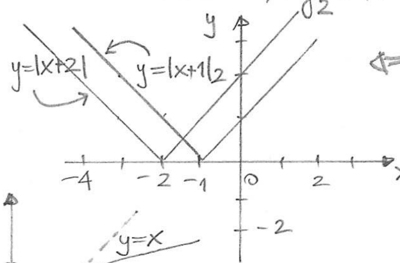
Risposta: (a).

3. (a) $\{x\in\mathbb{R} : |x|-1>0\} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ $|x|-1>0 \iff |x|>1 \iff x<-1$ o $x>1$.

(b) $\{x\in\mathbb{R} : \log_2|x|>1\} =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ $\log_2|x|>1 \iff |x|>2 \iff x<-2$ o $x>2$.

(c) $\{x\in\mathbb{R} : |x+1|<|x+2|\}$

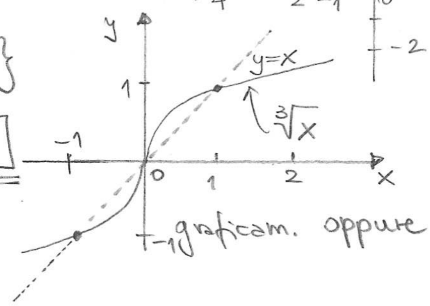
$=]-\frac{3}{2}, +\infty[$.



risoluzione grafica.

(d) $\{x\in\mathbb{R} : \sqrt[3]{x} \geq x\}$

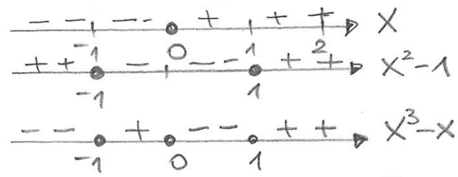
$=]-\infty,-1] \cup [0,1]$



graficam. oppure $\sqrt[3]{x} \geq x \iff x \geq x^3$

$\iff x^3-x \leq 0$

$\iff x(x^2-1) \leq 0$



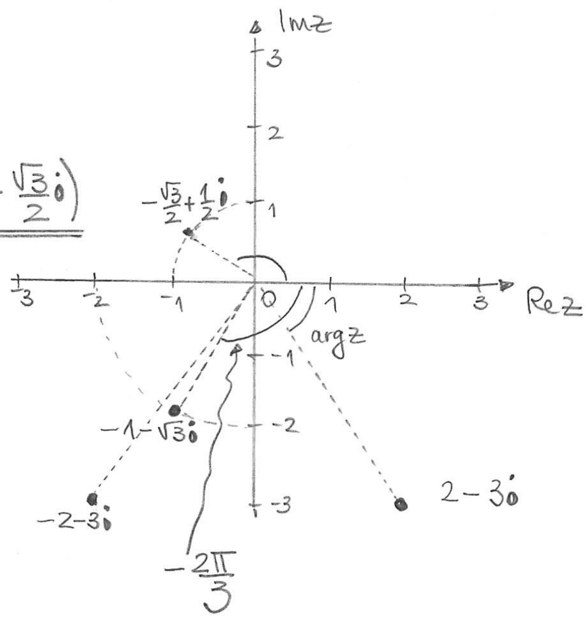
Risposta: (d).

4. (a) $2-3i$

(b) $-1-\sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

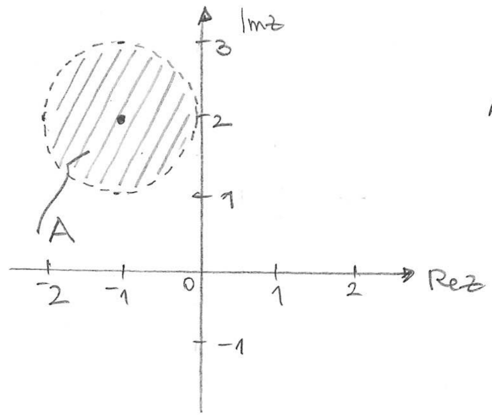
(c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

(d) $-2-3i$



Risposta: (b)

5. $|z+1-2i|<1 \iff |z-(-1+2i)|<1$ sono tutti e soli gli $z\in\mathbb{C}$ che distano da $z_0=-1+2i$ meno di 1, cioè sono tutti gli $z\in\mathbb{C}$ che si trovano all'interno della circonferenza di centro $z_0=-1+2i$ e raggio 1.



A è contenuto nel secondo quadrante.

Risposta: (b).

6. $z^2|z| \underset{z=x+iy}{=} (x+iy)^2\sqrt{x^2+y^2} = (x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2} + 2xy\sqrt{x^2+y^2}\, i$

quindi $z^2|z| \in \mathbb{R} \iff z$ è reale oppure z è puram. immaginario.

$(z+i)^2 \underset{z=x+iy}{=} (x+i(y+1))^2 = x^2-(y+1)^2+2x(y+1)\,i$

quindi $(z+i)^2 \in \mathbb{R} \iff z$ è puramente immaginario oppure $z = x - i$, $x \in \mathbb{R}$.

$z+1+\overline{(z+1)} \underset{z=x+iy}{=} x+\cancel{iy}+1+x+1-\cancel{iy} = 2x+2 \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

$(z+1)(\bar{z}-1) = |z|^2 - z + \bar{z} - 1 \underset{z=x+iy}{=} x^2+y^2-\cancel{x}-iy+\cancel{x}-iy-1$

$= x^2+y^2-1-2y\,i \in \mathbb{R} \iff z$ è reale.

Risposta: (c).

7. $|z| = \bar{z}$

Sia $z = x+iy$. Allora $|z| = \bar{z}$ si scrive

$\sqrt{x^2+y^2} = x - iy \iff \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = x \\ y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} |x| = x \\ y = 0 \end{cases}$

Quindi $|z| = \bar{z}$ è soddisfatta da $z = x$ con $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

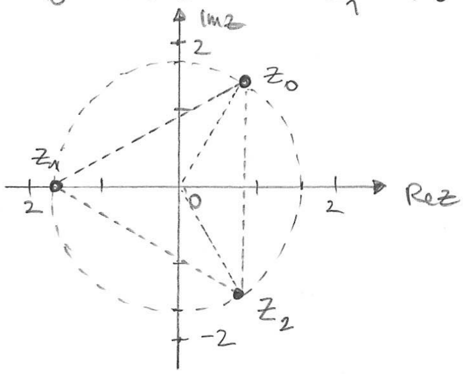
Risposta: (a).

8. $(1+i)^{12} = \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12} = 2^6 e^{i\pi\cdot 3} = -64.$

Risposta: (c).

9. $z^3+5=0 \iff z^3=-5 \iff z^3 = 5e^{i\pi}$

$z_0 = \sqrt[3]{5}\, e^{i\pi/3} \qquad z_1 = \sqrt[3]{5}\, e^{i\pi} \qquad z_2 = \sqrt[3]{5}\, e^{i\frac{5\pi}{3}}$



Risposta: (c).

10. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ $\qquad \operatorname{dom} f = \{x\in\mathbb{R} : x^2-4 \geq 0\}$

$= \underline{\underline{]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[}}\,.$

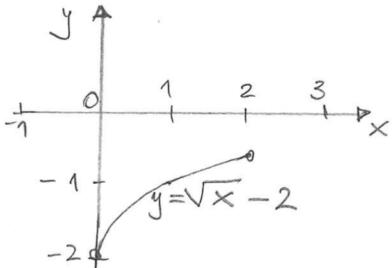
$g(x) = \dfrac{x}{x^2-4} \qquad \operatorname{dom} g = \{x\in\mathbb{R} : x^2-4 \neq 0\} = \underline{\underline{\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}}}.$

$h(x) = \log|x^2-4| \quad \operatorname{dom} h = \{x\in\mathbb{R} : x^2-4\neq 0\} = \underline{\underline{\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}}}.$

Risposta: (b).

funzione crescente

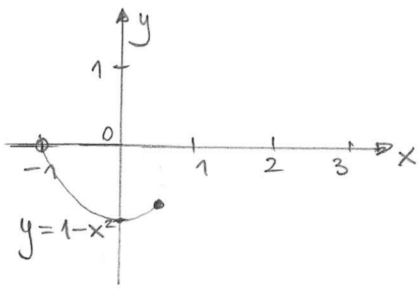
11. $\sup\limits_{]0,2[} (\sqrt{x}-2) = \underline{\underline{\sqrt{2}-2}}$



$\sup\limits_{[\frac{1}{3},1]} \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{1/2}\frac{1}{3}$

funzione decrescente

$\inf\limits_{]-1,\frac{1}{2}]} (1-x^2) = \underline{\underline{0}}$

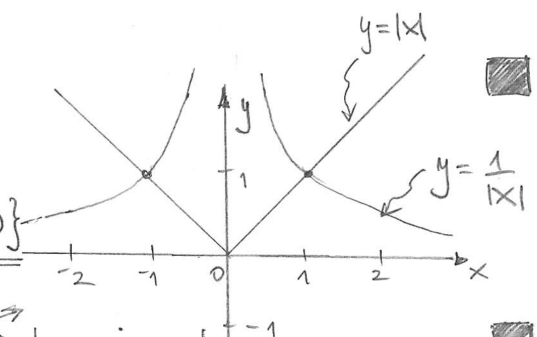


$\inf\limits_{[0,\pi]} \cos x = \cos\pi = -1$

decrescente su $[0,\pi]$

Risposta: (c).

12. $A = \{x\in\mathbb{R} : \frac{1}{|x|} > |x|\} = \underline{\underline{]-1,1[\setminus\{0\}}}$

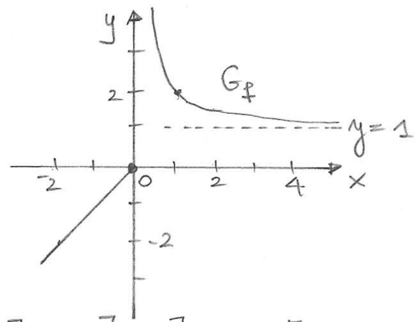


risoluzione grafica

Risposta: (d).

13. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ 1+\frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



(a) (F) poiché $\operatorname{im} f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

(b) (F) poiché $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$

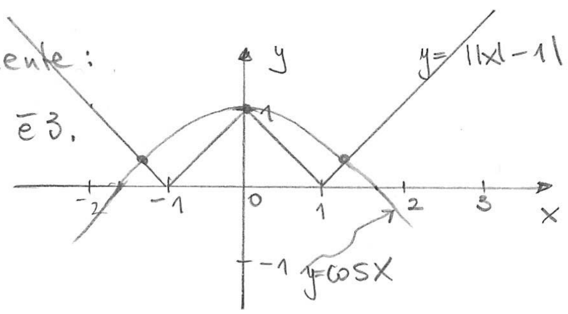
(c) (V) f è iniettiva : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $(x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

(d) (F) poiché $f|_{]-\infty, 0]}$ è strett. crescente, mentre $f|_{]0, +\infty[}$ è strett. decrescente.

Risposta: (c).

14. $\cos x = ||x| - 1|$ risolviamo graficamente:

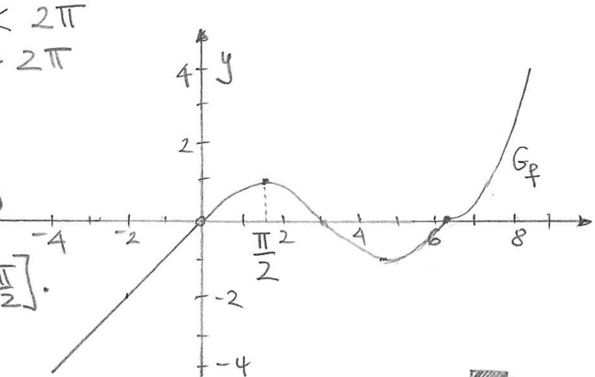
Il numero delle soluzioni di quest' eq. è 3.



Risposta: (c).

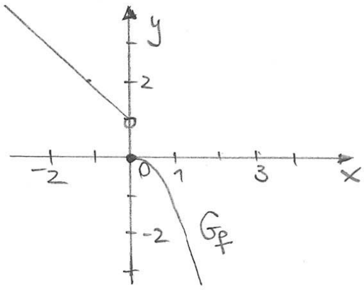
15. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ \sin x & \text{se } 0 \leq x < 2\pi \\ (x-2\pi)^2 & \text{se } x \geq 2\pi \end{cases}$

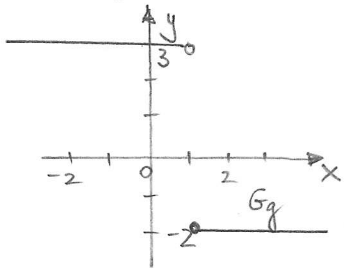
Il più grande intervallo A contenente 0 per cui $f|_A$ risulta iniettiva è $]-\infty, \frac{\pi}{2}]$.



Risposta: (d).

16. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x<0 \\ -x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x<1 \\ -2 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$





$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} 1-f(x) & \text{se } f(x)<0 \\ -(f(x))^2 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -(1-x)^2 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 3 & \text{se } f(x)<1 \\ -2 & \text{se } f(x) \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3 & \text{se } x \geq 0 \\ -2 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 1-g(x) & \text{se } g(x)<0 \\ -(g(x))^2 & \text{se } g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-(-2) & \text{se } x \geq 1 \\ -3^2 & \text{se } x<1 \end{cases} = \begin{cases} 3 & \text{se } x \geq 1 \\ -9 & \text{se } x<1. \end{cases}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \begin{cases} 3 & \text{se } g(x)<1 \\ -2 & \text{se } g(x) \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3 & \text{se } x \geq 1 \\ -2 & \text{se } x<1. \end{cases}$$

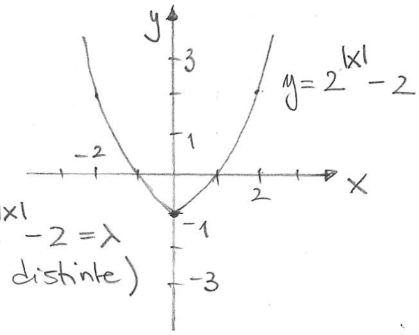
Risposta: (a).

17. $2^{|x|} - 2 = \lambda$

ha un'unica soluzione reale

per $\lambda = -1$.

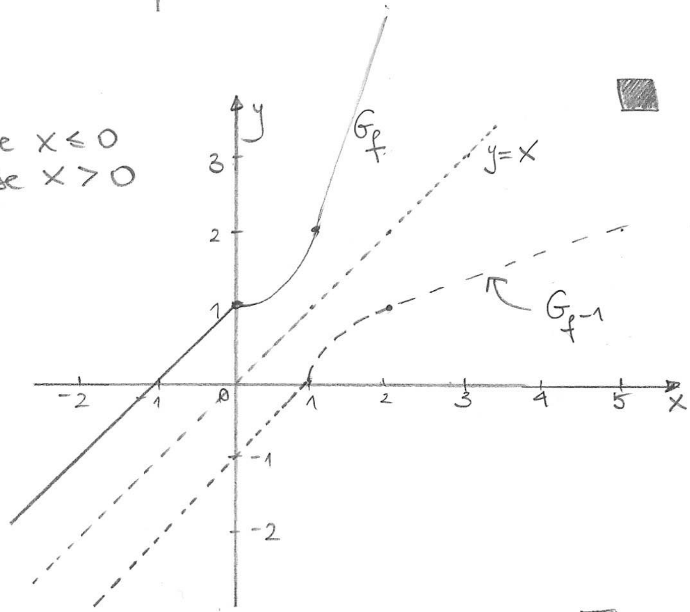
(Se $\lambda < -1$ $\nexists$ soluz. per $2^{|x|} - 2 = \lambda$
Se $\lambda > -1$ sono due soluz. distinte)



Risposta: (c).

18. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \le 0 \\ x^2+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \le 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



Risposta: (b).

19. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad g(x) = \operatorname{arctg} x$ $\quad f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(a) $g \circ f$ è crescente su $\mathbb{R}$, poiché composizione di due funz. strett. crescenti su $\mathbb{R}$;

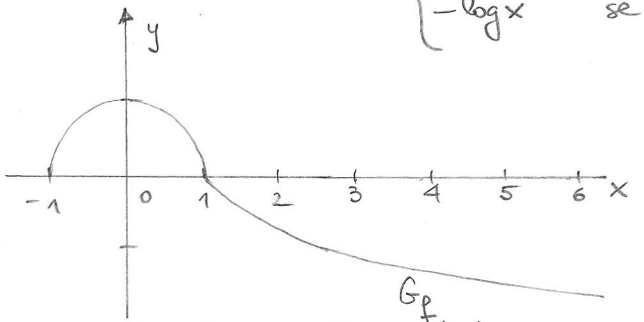
(b) $f \circ g$ è crescente su $\mathbb{R}$, poiché composizione di due funz. strett. crescenti su $\mathbb{R}$;

(c) $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}$ è limitata, poiché $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
e $-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} < \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} < \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(d) $g \circ f$ ha minimo su $\mathbb{R}$: è falsa! $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$
è strett. crescente su $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} (g \circ f)(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to +\infty} (g \circ f)(x) = \frac{\pi}{2}$.
$\operatorname{Im}(g \circ f) = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Risposta: (d).

20. $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in [-1,1] \\ -\log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$



(a) f è limitata su $[-1, +\infty[$: (F) $\quad f$ non è limitata inferiormente

(b) $x = 1$ è un pt. di min. loc. per f : (F).

(c) $x = 0$ è un pt. di massimo assoluto per f : (V).

(d) $\sup\limits_{[-1,+\infty[} f = +\infty$ (F) $\qquad \sup\limits_{[-1,+\infty[} f = \max\limits_{[-1,+\infty[} f = 1 = f(0)$.

<u>Risposta: (c).</u>