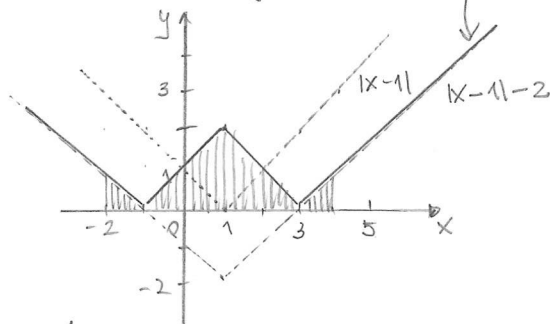


Università degli Studi di Trento - Dip. di Matematica
 CdL in Matematica e CdL in Fisica
 Test di autovalutazione di ANALISI MATA / ANALISI MAT 1
 a.a. 2020/21 14 dicembre 2020

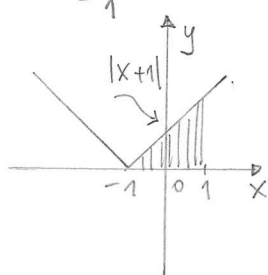
1. Quali dei seguenti integrali $\int_{-2}^4 ||x-1|-2| dx$, $\int_{-1}^1 (3|x^2-1| + \frac{|x+1|}{2}) dx$
 sono uguali a 5?

Procediamo graficamente!



$$\int_{-2}^4 ||x-1|-2| dx = \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{5}}.$$

$$\int_{-1}^1 (3|x^2-1| + \frac{|x+1|}{2}) dx = 3 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |x+1| dx$$



$$= 3 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 3 \cdot \frac{4}{3} + 1 = \underline{\underline{5}}.$$

Risposta: (d).

2. Siano $A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} dx$ $B = \int_1^5 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} dx$.

Oss. che $\int \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} dx$ e quindi
 $= \frac{1}{2} \int \frac{-2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} dx = -\frac{1}{2} \arcsin(2x-1) + c, c \in \mathbb{R}.$

Ne segue

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} dx = -\frac{1}{2} \left[\arcsin(2x-1) \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \left[\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin 0 \right] = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}}}.$$

Oss. che $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x}} dx = \sqrt{x^2+4x} + c, c \in \mathbb{R}$

-2-

Quindi $B = \int_1^5 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} dx = \sqrt{x^2+4x} \Big|_1^5 = 2\sqrt{5}$.

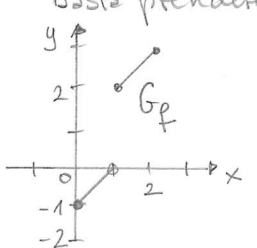
Allora $AB = \frac{\pi}{12} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{\pi\sqrt{5}}{6} > \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ Risposta: (d)

3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente.

Allora

a) $\exists c \in [a, b]$ t.c. $(b-a)f(c) = \int_a^b f(t) dt$: (F).

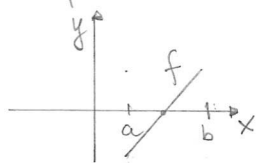
Basta prendere, per es., $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{su } [0, 1[\\ x+1 & \text{su } [1, 2] \end{cases}$



$\frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} + \frac{3+2}{2} \right] = 1$

$\nexists c \in [0, 2]$ t.c. $f(c) = 1$.

b) la funzione $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ su $[a, b]$ è monotona: (F).

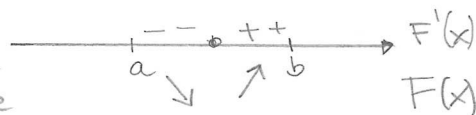


Basta prendere $f: [a, b]$ come nel grafico. In

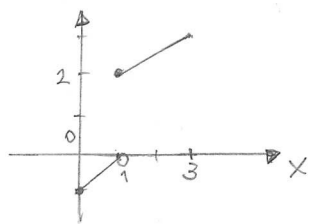
questo caso f è monotona crescente e anche continua.

Quindi dal TFC si ha $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$, e quindi

(si può anche usare semplicemente l'interpretazione geometrica dell'integrale e la definizione di $F(x)$ per concludere che F non è monotona)



c) la funzione $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ su $[a, b]$ è derivabile: (F).



Prendiamo, per esempio $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{se } x \in [1, 3] \end{cases}$$

allora $\lim_{x \rightarrow 1^-} F'(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} F'(x) = \frac{1}{2}$

F non è derivabile in $x=1$.

d) la funzione $|f|$ è integrabile su $[a, b]$: (V).

Se $f \geq 0$ su $[a, b]$, allora $|f| = f$ monotona crescente e

quindi integrabile. Altrimenti si ha $f \leq 0$ su $[a, c]$ e

$f \geq 0$ su $]c, b]$ e quindi $|f|$ è decrescente su $[a, c]$ e crescente

in $[c, b]$. Dunque $|f|$ è integrabile in $[a, b]$. ■

4) Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Se $\int_{-2}^2 (f(t))^2 f'(t) dt = 0$, allora si ha

$$0 = \int_{-2}^2 (f(t))^2 f'(t) dt = \left[\frac{(f(t))^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{1}{3} [f^3(2) - f^3(-2)]$$

$$\Rightarrow f(2) = f(-2).$$

Risposta (c).

5) Sia $A = \int_0^1 \sqrt{x} \arctg \sqrt{x} dx$.

Determiniamo $\int \sqrt{x} \arctg \sqrt{x} dx = \int (t \arctg t) \cdot 2t dt =$
 $\begin{matrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 = \varphi(t) \\ dx = 2t dt \end{matrix} = 2 \int t^2 \arctg t dt =$

= $2 \left[\frac{t^3}{3} \arctg t - \int \frac{t^3}{3} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \right]$
 integrazione per parti
 $= 2 \left[\frac{t^3}{3} \arctg t - \frac{1}{3} \int \left[t - \frac{t}{t^2+1} \right] dt \right]$

$t^3 : t^2+1 = t$
 $\frac{t^3+t}{1-t}$
 $= 2 \left[\frac{x\sqrt{x} \arctg \sqrt{x}}{3} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} \log(1+x) \right] + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Abbiamo quindi $A = \int_0^1 \sqrt{x} \arctg \sqrt{x} dx = 2 \left[\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \log 2 \right]$
 $= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log 2.$

Ov $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log 2 > \frac{3}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log 2 < \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log e = \frac{\pi}{6} < \frac{2}{3}$

Quindi $\frac{1}{6} \leq A < \frac{2}{3}.$

Risposta: (b). ■

6) $A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$ $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$

Cerchiamo $\int \frac{1}{\sin x} dx$. Usiamo la sostituzione $t = \tan \frac{x}{2}$
 $x = 2 \arctg t$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
 $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

Allora $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \log|t| + c$
 $t = \tan \frac{x}{2}$
 $= \log|\tan \frac{x}{2}| + c, c \in \mathbb{R}.$

Ne segue che $A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \left[\log|\tan \frac{x}{2}| \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \log 1 - \log\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
 $= \frac{1}{2} \log 3.$

$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$

Quindi $A = \frac{1}{2} \log 3$, $B = 1$. Ne segue che $A < B \leq 2A$

Risposta: (b).

7) Sia $F(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt[3]{2-t}} dt$. Oss. che $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) \in \mathbb{R}$. Infatti

$f(t) \doteq \frac{t}{\sqrt[3]{2-t}} \sim \frac{2}{\sqrt[3]{2-t}}$ per $t \rightarrow 2^-$.

Poiché $\int_1^2 \frac{2}{\sqrt[3]{2-t}} dt$ è convergente, per il criterio del confronto asintotico anche $\int_1^2 f(t) dt$ risulta convergente. Per def.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \int_1^2 f(t) dt.$

Sia $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-4}} dt$. Oss. che $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) \in \mathbb{R}$. Infatti

$f(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{t^2-4}} = \frac{1}{\sqrt{(t-2)(t+2)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{t-2}}$ per $t \rightarrow 2^-$.

Poiché $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-2}} dt$ è convergente, per il criterio del confronto asintotico anche $\int_1^2 f(t) dt$ risulta convergente. Per def.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \int_1^2 f(t) dt.$

Sia $F(x) = \int_1^x \frac{\sin(2-t)}{(t-2)^2} dt$. Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = +\infty$. Infatti

$f(t) \doteq \frac{\sin(2-t)}{(t-2)^2} = \frac{\sin(2-t)}{(2-t)^2} \sim \frac{(2-t)}{(2-t)^2}$ per $t \rightarrow 2^-$.

Poiché $\int_1^2 \frac{1}{2-t} dt = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico anche $\int_1^2 f(t) dt$ è divergente positivamente. Per definizione

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = +\infty.$$

Risposta: (C).

$$8) f(x) = \frac{(x-1)x}{\sqrt[3]{(x-1)^5} \sqrt[5]{(x-3)^7}} = \frac{(x-1)x}{(x-1)^{5/3} (x-3)^{7/5}}$$

Oss. che $f(0) = 0$

$$f(x) \sim \frac{x-1}{(x-1)^{5/3} (-2)^{7/5}} \sim \frac{1}{(x-1)^{2/3} (-2)^{7/5}} \quad \text{per } x \rightarrow 1^-$$

NOTA: $\frac{2}{3} < 1$.

$f(x)$ è una funzione continua e limitata in $]-1, 0[$ e quindi Riemann-integrabile

$$f(x) \sim \frac{x^2}{x^{5/3} x^{7/5}} = \frac{1}{x^{5/3 + 7/5 - 2}} = \frac{1}{x^{16/15}} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

NOTA: $\frac{16}{15} > 1$

$$f(x) \sim \frac{6}{2^{5/3} (x-3)^{7/5}} \quad \text{per } x \rightarrow 3^+$$

NOTA: $\frac{7}{5} > 1$.

Perché f è continua su ogni intervallo $[0, 1[$, $]-1, 0[$, $[4, +\infty[$, $]3, 4]$, dalle osservazioni appena fatte, sapendo che $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx < +\infty$, $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^{16/15}} dx < +\infty$, $\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{7/5}} dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico possiamo concludere che f è integrabile su $[0, 1[$, $[4, +\infty[$, mentre $\int_3^4 f(x) dx = +\infty$. Sull'intervallo $]-1, 0[$ f è Riemann integrabile. In definitiva, f è integrabile su tre dei quattro intervalli dati.

Risposta: (C).

9) Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \log x$ su $]0, +\infty[$. Abbiamo

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \log x \right) dx = 2\sqrt{x} + x(\log x - 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

• $f(x) = \frac{1}{x(1+\log^2 x)}$ su $]0, +\infty[$. Abbiamo

$$F(x) = \int \frac{1}{x(1+\log^2 x)} dx = \arctg(\log x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

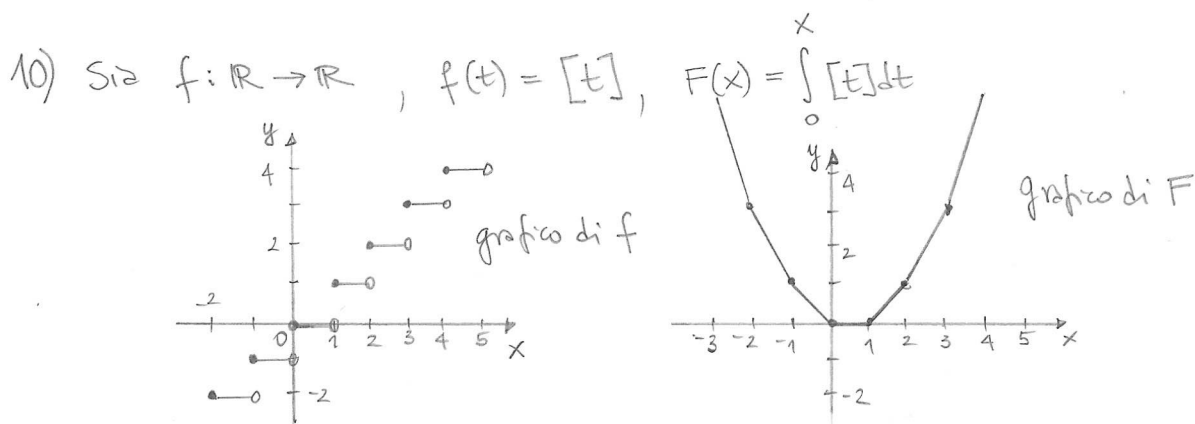
• $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - \log^2 x}{x}$ su $]0, +\infty[$. Abbiamo $f(x) = x^{-2/3} - \frac{\log^2 x}{x}$

$$F(x) = 3x^{1/3} - \frac{\log^3 x}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

L'unica funzione $f(x)$, per cui $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$ è la prima.

Quindi abbiamo

Risposta: (b).



1. la funzione F è continua: (V): f ha pt. di discontinuità solo di tipo "salto", e quindi F è continua.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(n)}{n^2} = \frac{1}{2}$ (V): Infatti $F(n) = \int_0^n f(t) dt = 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + \dots + (n-1) \cdot 1 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$

$$= \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(n)}{n^2} = \frac{1}{2}$.

3. La funzione F è crescente su $\mathbb{R}$. (F)

Questo fatto si può dedurre facilmente dalla definizione di $F(x)$ e il segno di f . Per es. $F(-2) = \int_0^{-2} f(t) dt = 3 > F(1)$.

Ma possiamo anche osservare che $F'(x) = f(x) \quad \forall x \notin \mathbb{Z}$ e

$f(x) < 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0[$, mentre $f(x) > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$.

4. $F'(\pi) = 3$ (V) Infatti $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

Poiché $f(\pi) = [\pi] = 3$, si ha $F'(\pi) = 3$.

Risposta: (C)

11) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $\int_{-2}^4 f(x) dx = 2$.

Sia $\varphi: [0, 3] \rightarrow [-2, 4]$

$t \mapsto x = \varphi(t) = 2(t-1) \quad \varphi'(t) = 2$.

Ricordiamo che la formula di integraz. per sostituzione asserisce che

$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ $\varphi: [c, d] \rightarrow [\varphi(c), \varphi(d)] \quad \varphi \in C^1$
se $f: [\varphi(c), \varphi(d)] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Quindi $\int_0^3 f(2(t-1)) 2 dt = \int_{-2}^4 f(x) dx$.

Risposta: (b)

12) $A = \int_0^a \left(2\sqrt{x} - \frac{x}{4} + \frac{3}{2} \right) dx$. Abbiamo $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{x}{4} + \frac{3}{2} \right) dx = \frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x}{2}$

Quindi $A = \frac{4}{3} a^{3/2} - \frac{a^2}{8} + \frac{3}{2} a$.

Abbiamo $A = 5a$ per $a > 0 \iff \frac{4}{3} a^{3/2} - \frac{a^2}{8} + \frac{3}{2} = 5$

$\iff \frac{4}{3} a^{3/2} - \frac{a^2}{8} - \frac{7}{2} = 0$

Poniamo $t = \sqrt{a}$. Allora dobbiamo risolvere

$-\frac{t^2}{8} + \frac{4}{3} t - \frac{7}{2} = 0$, omm $-3t^2 - 32t + 84 = 0$.

Abbiamo $t_{1/2} = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 1008}}{-6} = \frac{32 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{32 \pm 4}{6}$

$\Rightarrow t_1 = 6, t_2 = \frac{14}{3}$ sono due soluzioni accettabili

essendo $t = \sqrt{a} > 0$.

Allora, in definitiva $a = 36$ (oppure $a = \left(\frac{14}{3}\right)^2$) soddisfa $20 \leq a \leq 40$.

Risposta: (C)

Oss. $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$ soddisfano
 $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [0, \bar{x}]$ con $75 < \bar{x} < 76$.

- 8 -

$$13) \mu = \frac{1}{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x \cos 2x dx = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x \cos 2x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Ora } \int x \cos 2x dx &= x \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} dx \\ &= x \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x \cos 2x dx &= \left[x \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= \frac{3\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Risulta allora che $\mu = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \underline{\underline{-1}}.$

Risposta: (b)

$$14) \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x}{(\arctan x)(x^2+2)}}_{f(x)} dx$$

$$f(x):]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\text{ continua}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$, quindi f è integrabile in un intorno destro di 0.

Oss. che $f(x) \sim \frac{x}{x^{\alpha} \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi x^{\alpha-1}}$ per $x \rightarrow +\infty$.

Quindi l'integrale dato è convergente $\Leftrightarrow \alpha - 1 > 1$, ossia $\alpha > 2$.

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin(x^\alpha)}{x^2}}_{f(x)} dx$$

$$f(x):]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha}{x^2} \text{ per } x \rightarrow 0^+, \text{ ossia}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}} \text{ per } x \rightarrow 0^+.$$

Risulta che f è integrabile in senso improprio in un intorno destro di 0 se e solo se $2 - \alpha < 1$, ossia $\alpha > 1$.

In definitiva; entrambi gli integrali convergono $\Leftrightarrow \alpha > 2$.

Risposta (a).

$$15) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\varepsilon^3}^{2\varepsilon} (e^{-x^2} - 1) dx}{\varepsilon^3} = \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} \stackrel{\text{TFC}}{=} \frac{(e^{-(2\varepsilon)^2} - 1) \cdot 2 \left(\frac{1}{4\varepsilon^2} + o(\varepsilon^2) \right) \cdot 2}{3\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{8}{3}.$$

Dal teorema di de L'Hôpital segue che anche il limite dato vale $-8/3$.

Risposta: (c).