

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right) \quad \left[\infty - \infty \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} &= \frac{(x+1)\log(1+x) - x}{x\log(1+x)} \quad \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \frac{(x+1)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x}{x^2 + o(x^2)} = \frac{x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \quad \text{per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

□

Suddividendo con de L'Hôpital:

$$\frac{(x+1)\log(1+x) - x}{x\log(1+x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\text{Ora } \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\log(1+x) + \frac{x+1}{x+1} - 1}{\log(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \frac{(\log(1+x))'}{\log(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\text{Ora } \frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)} = \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1+x-k}{(1+x)^2}} \quad x \rightarrow 0^+ \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2} \quad \stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

□

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\frac{(\arccos x)'}{(\sqrt{1-x})'} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \cdot 2\sqrt{1-x} \quad x \rightarrow 1^- \rightarrow \sqrt{2},$$

$$\text{quindi per de L'Hôpital } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}.$$

□

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\log x)^2 = \lim_{0 \cdot \infty} \frac{(\log x)^2}{\frac{1}{x}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2(\log x) \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2(\log x)}{-\frac{1}{x}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Ora $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 2x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\log x)^2 = \underline{\underline{0}} \quad \square$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{0}{\infty}$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = -\frac{\sin^2 x}{x \cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \log x = \underline{\underline{0}} \quad \blacksquare$

3. Dobbiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x)}{x^2} = \frac{0}{0}$. Cerchiamo di applicare de L'Hôpital: si ha

$\frac{3f'(x)}{2x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{f'(x)}{x}$;

per ipotesi quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f'(x)}{2x} = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Dal teorema di de L'Hôpital segue allora che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x)}{x^2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$. $\blacksquare$

4. $(a_n)_n$, con $a_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente.

1. Si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$: vera. Infatti, poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Ma quest'ultima è equivalente a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$. $\square$

2. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ è convergente: falso. Basta considerare $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1$ (per es. $a_0 = 0$). Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente per il criterio di Leibniz, mentre $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente positivo. $\square$

3. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è assolutamente convergente: falso.
 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è assolutamente convergente significa che

$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è convergente; ovviamente questo è falso. Basta prendere $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\forall n \geq 1$ (per es. $a_0 = 0$). $\blacksquare$

5. Supp. che $(a_n)_n$ nr. reali positivi t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}$; questo significa

(a) (F) basta prendere $a_n = \begin{cases} M & M > 0 \text{ fissato, } n \leq \bar{n} \\ (\frac{1}{3})^n & \text{per } n \geq \bar{n} + 1 \end{cases}$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = M(\bar{n} + 1) + \sum_{k=\bar{n}+1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^k > \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ per un M suff. grande. $\square$

(b) (V) basta osservare che $|a_n \cos n| \leq |a_n| = a_n \forall n \geq 0$
Essendo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi convergente (segue dal criterio della radice n -esima), per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \cos n|$ è convergente. Quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos n$ è assolut. convergente, e quindi convergente. $\square$

(c) (F) Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente (dal criterio della radice n -esima) si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Risulta allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ (oss. che $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ per ipotesi). Quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ non può essere convergente. Essendo una serie a termini positivi, possiamo anche afferire che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge positivamente. $\square$

(d) (F) Dalle ipotesi non segue necessariamente che $(a_n)_n$ sia una successione decrescente!

Basta prendere $a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{2}{3^n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$ $\blacksquare$

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$: $\sqrt[n]{2} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log 2} - 1 \sim \frac{\log 2}{n} \quad n \rightarrow +\infty$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data diverge positiv. poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log 2}{n} = \log 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. $\square$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{2+n}}$: $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{2+n}} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt[3]{2+n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$
 $= \frac{1}{\sqrt[3]{2+n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{2n^{5/6}} \quad n \rightarrow +\infty$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/6}} = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, anche la serie data diverge positiv. $\square$

$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \arcsin \frac{1}{n^3}$: Poiché $n^2 \arcsin \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente positiv., per il criterio del confronto asintotico la serie data risulta divergente positiv. $\blacksquare$

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)^\alpha$: $\left(\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)^\alpha \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$ per $n \rightarrow +\infty$; poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ è convergente se e solo se $2\alpha > 1$, per il criterio del confronto asintotico la serie data è convergente $\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$. $\square$

$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \sin \frac{1}{2^n}$: $n^\alpha \sin \frac{1}{2^n} \sim \frac{n^\alpha}{2^n}$ per $n \rightarrow +\infty$. Applicando, per esempio il criterio della radice n -esima, concludiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{2^n}$ è convergente $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, e quindi per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + \alpha^{2n}}$: Oss. che se $\alpha^2 \leq 1$, allora $\frac{1}{n + \alpha^{2n}} \sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$. Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + \alpha^{2n}}$ è diverg. positiv. se $\alpha^2 \leq 1$. $\square$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^{2n}}$: risulta una serie convergente $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Infatti per
 • $\alpha^2 \leq 1$ si ha $\frac{1}{n^2 + \alpha^{2n}} \sim \frac{1}{n^2}$ per $n \rightarrow +\infty$,
 • $\alpha^2 > 1$ si ha $\frac{1}{n^2 + \alpha^{2n}} \sim \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n$ per $n \rightarrow +\infty$.
 (basterebbe anche oss. che $\frac{1}{n^2 + \alpha^{2n}} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$)

In entrambi i casi, la serie a confronto è convergente e quindi anche la serie data lo è. Quindi, la serie data è convergente $\forall x \in \mathbb{R}$. ■

8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} \right)$: Abbiamo che $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \quad \forall n \geq 1$

Quindi $\frac{n+1}{(2n)^2} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} \quad \forall n$. Poiché $\frac{n+1}{4n^2} \geq \frac{1}{4n}$ e

poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è positivamente divergente, anche la serie

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} \right)$ è divergente positivamente per il criterio del

confronto $\left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{4n} \quad \forall n \geq 1 \right)$. □

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k^3} \right)$: Abbiamo che $\sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^3}$
 $+ \frac{1}{(2n)^3} + \dots + \frac{1}{(3n-1)^3} +$
 $+ \frac{1}{(3n)^3} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^3} + \dots$
 $\vdots$
 $+ \frac{1}{((n-1)n)^3} + \dots + \frac{1}{(n^2-1)^3} + \frac{1}{(n^2)^3}$

$$\leq \frac{n}{n^3} + \frac{n}{(2n)^3} + \frac{n}{(3n)^3} + \dots + \frac{n}{((n-1)n)^3} + \frac{1}{(n^2)^3}$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) \leq \frac{C}{n^2}$$

convergente

$C > 0$ opportuna

Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k^3} \right)$ è convergente per il criterio del confronto. $\left(\sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k^3} \leq \frac{C}{n^2} \quad \forall n \geq 1 \right)$. ■

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$: $a_n = \frac{(2n)!}{n^n}$; allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(2n)!}$
 $= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^n(n+1)} \cdot \frac{n^n}{(2n)!} = \frac{4n^2+4n+2}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n}$
 $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Quindi la serie non converge! □

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$: $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$; allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}$

Quindi la serie è convergente. $\frac{2}{e} < 1$. □

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} : a_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} ; \text{ allora } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} (n+1)! (n+1)!} \cdot \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Il criterio del rapporto non mi permette di concludere se

la serie converge o diverge positivamente. ■

10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} - bx - \sqrt{1+x^2}}{x \sin x}$

Ricordiamo gli sviluppi di Taylor centrati in 0

delle funzioni e^t , $(1+t)^a$ e $\sin t$:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$(1+t)^a = 1 + at + a(a-1)\frac{t^2}{2!} + o(t^2) \quad "$$

$$\sin t = t + o(t) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{e^{ax} - bx - \sqrt{1+x^2}}{x \sin x} &= \frac{1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2!} + \frac{a^3 x^3}{3!} + o(x^3) - bx - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)}}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{(a-b)x + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \end{aligned}$$

Segue allora che il limite dato esiste finito e non nullo $\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a^2 \neq 1 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow a=b, a^2 \neq 1$.

Quindi l'unica coppia accettabile tra quelle proposte è la coppia $(a,b)=(2,2)$. ■

11. $f(x) = \sin x \quad x_0 = \frac{\pi}{2} \quad f(x) = \sin x \quad f^{(1)}(x) = \cos x \quad f^{(2)}(x) = -\sin x$
 $f^{(3)}(x) = -\cos x \quad f^{(4)}(x) = \sin x \quad f^{(5)}(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} P_{5, \frac{\pi}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^5 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - \frac{\pi}{2})^k \\ &= \sin \frac{\pi}{2} + \cancel{\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) \frac{(x - \frac{\pi}{2})}{1!}} - \cancel{\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2!}} - \cancel{\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) \frac{(x - \frac{\pi}{2})^3}{3!}} \\ &\quad + \cancel{\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) \frac{(x - \frac{\pi}{2})^4}{4!}} + \cancel{\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) \frac{(x - \frac{\pi}{2})^5}{5!}} \\ &= \underline{\underline{1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2!} + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^4}{4!}}}. \end{aligned} \quad \text{■}$$

12. $f(x) = \log(1+x^2) + \cos(\sqrt{2}x) - 1 = \cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + \cancel{1} - \cancel{\frac{2x^2}{2!}} + \frac{4x^4}{4!} + o(x^4) - \cancel{1}$
 $= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{x^4}{3} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$

ordine di infinitesimo = 4. ■

13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} (x-1)^n$

$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad x_0 = 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}} \rightarrow 1 \Rightarrow r=1$

$\Rightarrow$ la serie converge sicuramente $\forall x \in]0, 2[$

in $x=0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ converge per il criterio di Leibniz (ma converge anche assolutamente!)

in $x=2$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ è convergente.

Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} (x-1)^n$ ha come insieme di convergenza $E = [0, 2]$, intervallo chiuso e limitato.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+2} (x+1)^n \Rightarrow$ insieme di convergenza $E =]-2, 0[$

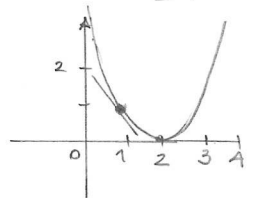
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n \Rightarrow$ insieme di convergenza $E =]-1, 1[$.

14. $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, con $f'(1) < 0$.

(a) (F) $f(x) = (x-2)^2$ è decrescente su $]-\infty, 2]$ e crescente su $[2, +\infty[$

(b) (F) $f(x) = (x-2)^2 \quad f(1) = 1 \quad f(4) = 4$

(c) (F) $f(1+k) < f(1)$ per k sufficientemente piccolo e positivo!



mentre $f(1+k) > f(1)$ per k sufficientemente piccolo e negativo!

(d) (V) Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, f è derivabile e la sua derivata è continua su $\mathbb{R}$! Quindi da $f'(1) < 0$ segue, per il teorema della permanenza del segno che $\exists$ un intorno U di 1 tale che $f'(x) < 0 \quad \forall x \in U$; quindi f è decrescente in U .

15. $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile due volte in $[0, 1]$ tale che

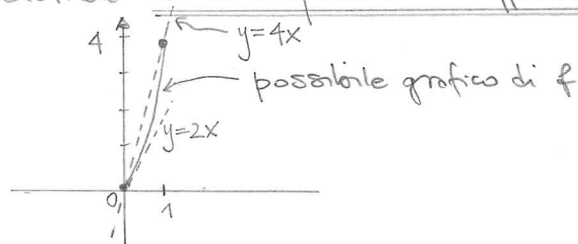
$f(0)=0, f(1)=4, f'(0)=2, f''(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$.

i) Da $f''(x) > 0$ su $[0, 1]$ si deduce che f è strett. convessa su $[0, 1]$.

ii) Da $f(0)=0$ e $f'(0)=2$ si deduce che la retta tg. al grafico di f in $(0, 0)$ è $y=2x$

1. Segue allora da i) e ii). □
2. Da $f''(x) > 0$ su $[0,1]$ segue che $f'(x)$ è strettamente crescente su $[0,1]$.
Poiché $f'(0) = 2 > 0$, risulta $f'(x) > 0$ su $[0,1]$, ossia f è strett. crescente su $[0,1]$. Poiché $f(1) = 4$, la retta $y = 4x$ interseca il grafico di f nel pt. $(0,0)$ e in un pt. $(\bar{x}, \bar{y})$ con $\bar{x} \in]0,1[$ (f è continua!) essendo $e > 2$ e $y = 2x$ retta tg. al grafico di f in $(0,0)$. □
3. $y = 4x$ è l'eq. della retta passante per $(0,0)$ e $(1,4)$. Essendo f convessa si ha $f(x) \leq 4x \quad \forall x \in [0,1]$. □
4. Per il teorema di Lagrange applicato ad f in $[0,1]$ si ha che $\exists c \in]0,1[$ t.c. $f(1) - f(0) = f'(c)$, ossia $f'(c) = 4$.
D'altra parte $f'(0) = 2$. Per la continuità di f' esiste $x \in [0,1]$ t.c. $f'(x) = 3$.

Quindi tutte e quattro le affermazioni sono necessariamente vere!



16. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e $g(x) = ax$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(a) f e g asintotiche per $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y = ax$ è un asintoto obliquo per f per $x \rightarrow +\infty$.

(F) $f(x) = ax + 1 \quad g(x) = ax$

Allora $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ ma $g(x)$ non è un asintoto obliquo per f per $x \rightarrow +\infty$!! □

(b) $y = ax$ è un asintoto obliquo di f per $x \rightarrow +\infty$, allora f e g sono asintotiche per $x \rightarrow +\infty$: (V)

Per ipotesi $f(x) = ax + o(1)$ per $x \rightarrow +\infty$. Quindi $\frac{f(x)}{ax} = \frac{ax + o(1)}{ax} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \Rightarrow f$ ha un asintoto orizz. per $x \rightarrow +\infty$: (F) □

Es. $f(x) = \log(1+x^2)$. □

(d) f ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ (F)

Es. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ □