2020-11-23

1.

Il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)$$

è uguale a

(a) 0
(b) $\frac{1}{2}$
(c) 1
(d) nessuno dei valori indicati nelle altre risposte

2.

Quanti dei limiti

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} \qquad \lim_{x\to 0^+} x(\log x)^2 \qquad \lim_{x\to 0^+}(\sin x)\log x$$

sono uguali a 0?

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

3.

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile e infinitesima per $x\to 0$. Se si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=3,$$

allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{3f(x)}{x^2}$$

è uguale a

(a) 1
(b) 9
(c) 18
(d) nessuno dei valori indicati nelle altre risposte

4.

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali tale che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sia convergente. Quante delle affermazioni seguenti sono necessariamente vere?

1. Si ha $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.
2. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ è convergente.
3. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è assolutamente convergente.

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

5.

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali positivi tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}.$$

Allora necessariamente si ha

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$
(b) che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos n$ è assolutamente convergente
(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$
(d) che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz

6.

Quante delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(n^2\arcsin\frac{1}{n^3}\Big) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{2+n}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sqrt[n]{2}-1\big)$$

sono convergenti?

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

7.

Quante delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\log\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)\right)^{\alpha} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha}\sin\frac{1}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+\alpha^{2n}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^{2n}}$$

convergono per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$?

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

8.

Le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}\right) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k^3}\right)$$

sono

(a) entrambe convergenti
(b) la prima convergente e la seconda divergente
(c) la prima divergente e la seconda convergente
(d) entrambe divergenti

9.

Quale delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$$

converge per il criterio del rapporto?

(a) Nessuna
(b) La prima
(c) La seconda
(d) La terza

10.

Per quale delle seguenti coppie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{ax} - bx - \sqrt{1+x^2}}{x \sin x}$$

esiste finito e non nullo?

(a) $(1,1)$
(b) $(-1,1)$
(c) $(2,2)$
(d) $(-1,-1)$

11.

Quale dei seguenti è il polinomio di Taylor di ordine 5 della funzione $f(x) = \sin x$ centrato in $x_0 = \frac{\pi}{2}$?

(a) $1 - \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{4!}$
(b) $1 - \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{2!} + \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^5}{4!}$
(c) $\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!} + \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^5}{5!}$
(d) $\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{(x+\frac{\pi}{2})^3}{3!} + \dfrac{(x+\frac{\pi}{2})^5}{5!}$

12.

L'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = \log(1+x^2) + \cos(\sqrt{2}x) - 1$$

rispetto all'infinitesimo campione x è

(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) 5

13.

Quale delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}(x-1)^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+2}(x+1)^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} x^n$$

ha come insieme di convergenza un intervallo chiuso e limitato?

(a) La prima
(b) La seconda
(c) La terza
(d) Nessuna

14.

Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ con $f'(1) < 0$. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

(a) La funzione f è decrescente su $\mathbb{R}$.
(b) Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $f(1+\varepsilon) < f(1)$.
(c) Per ogni numero reale k sufficientemente piccolo si ha $f(1+k) - f(1) < 0$.
(d) Esiste un intorno di 1 su cui la funzione f è decrescente.

15.

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $[0,1]$ tale che

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 4, \quad f'(0) = 2, \quad f''(x) > 0,\ \forall x \in [0,1].$$

Quante delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere?
1. Per ogni $x \in [0,1]$ si ha $f(x) \geq 2x$.
2. La retta di equazione $y = ex$ interseca il grafico di f in due punti.
3. Per ogni $x \in [0,1]$ si ha $f(x) \leq 4x$.
4. Esiste $x \in [0,1]$ tale che $f'(x) = 3$.

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

16.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia $g(x) = ax$ con a numero reale non nullo. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Se f e g sono asintotiche per $x \to +\infty$, allora $y = ax$ è un asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$.
(b) Se $y = ax$ è un asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$, allora f e g sono asintotiche per $x \to +\infty$.
(c) Se si ha $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, allora f ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.
(d) Se f ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, allora si ha $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.