Università degli Studi di Trento - Corso di Laurea Triennale in Matematica
Corso di Calcolo delle Variazioni - a.a. 2019/20 (periodo 17/02/20-04/05/20)
docente: Prof. Anneliese Defranceschi
e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it
homepage: http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

Lezioni:
settimana 17-21/02: lunedì 9.30-11.30 (Aula A224), mercoledì 8.30-10.30 (Aula A224)
settimana 24-28/02: sospensione lezioni (per Coronavirus)
settimana 02-06/03: mercoledì 8.30-10.30 (Aula A224), gioved (prima lezione registrata)
Periodo 09/03-04/05: lezioni registrate

17/02/20 (2 ore):

Introduzione al corso: orario, indirizzo e-mail, presentazione del programma (in linea di massima).
Ottimizzazione (ricerca del minimo) in generale: minimo (valore minimo), punto di minimo. In particolare, in $\mathbb{R}$, condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di punti di minimo (locali e non) nel caso di funzioni regolari (metodo indiretto); teorema di Weierstrass e variante per una dimostrazione diretta dell'esistenza di un minimo (metodo diretto).
Integrali variazionali (integrando variazionale, funzione di Lagrange o lagrangiana) e problemi di minimo relativi a funzionali integrali. Esempi di modellizzazione di problemi dell'Analisi/Geometria e della Fisica Matematica come problemi di minimo relativi a funzionali integrali: a) curva di minima lunghezza tra due punti fissati nel piano; b) la brachistocrona (cicloide); c) superficie di rotazione di area minima; d) problema (disuguaglianza) isoperimetrico (problema di Didone) (c) e d) solo accennati).
Nota 1Lez. pag. 1-5

19/02/20 (2 ore):

Formulazione del problema di minimo c) (cenno al problema della catena pesante - catenaria) e del problema d) (il problema di Didone - caso non-parametrico).
Nota sulla non-esistenza di minimi: $F(u) = \int_{-1}^{1} x^2(u'(x))^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ (esempio di Weierstrass); $F(u) = \int_0^1 \frac{1}{1+(u'(x))^2}\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$ (in quest'ultimo caso anche non-esistenza del massimo).
Nota 2Lez. pag. 6-12

04/03/20 (2 ore):

Metodi indiretti (classici): approccio classico per affrontare il problema di minimo per funzioni/funzionali integrali. Qualche cenno storico.
Ottimizzazione in $\mathbb{R}^n$: variazione prima e seconda. Cond. necessarie/sufficienti per punti di minimo (locale).
Variazione prima e variazione seconda per $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq V$ con V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (linguaggio introdotto da Lagrange e Eulero; il simbolo lagrangiano δ). Punto di minimo u_0 per F e l'annullarsi della variazione prima in u_0 (e variazione seconda non-negativa). Esercizi: calcolo della variazione prima per funzionali integrali (derivazione sotto il segno di integrale: dato per noto). Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni.
Nota 3Lez. pag. 13-20

05/03/20 (2 ore):

L'annullamento della variazione prima e condizioni necessarie per punti di minimo per funzionali integrali: Equazione di Eulero-Lagrange in forma debole (EED). Estremale debole di F. Equazione di Eulero-Lagrange (EE). Estremale di F. Dim. di (EED) e (EE). Commenti vari.
Esercizio: Determinare gli estremali di $F(u)$ relativa alla funzione lagrangiana $f(x,u,\xi) = \xi^2 + u^2$.
Non-regolarità $\mathcal{C}^2$ di estremali deb. e minimizzanti: $F(u) = \int_{-1}^{1}(u(x))^2[2x - u'(x)]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$.

Non-esistenza di un minimizzante $\mathcal{C}^1$: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\, dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ (paradosso di Eulero). Un punto di minimo esiste nella classe delle funzioni $\mathcal{C}^1$-a tratti.
Equazione di Eulero-Lagrange per $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\, dx$. Esistenza di un estremale di F in in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ che non è un minimizzante. Svolgimento dell'esercizio proposto a lezione.
Nota 4Lez. pag. 21-29

09/03/20 (2 ore):

Commento du punti di minimo $\mathcal{C}^1$-a tratti
Convessità e condizione sufficiente di ottimalità per funzionali integrali: La convessità della funzione lagrangiana come condizione sufficiente affinchè un estremale (debole) di F sia un punto di minimo. Stretta convessità ed unicità degli eventuali minimizzanti.
Ripasso sulle funzioni convesse in $\mathbb{R}^n$; caratterizzazione della convessità nel caso di funzioni $\mathcal{C}^1$ e $\mathcal{C}^2$. Disuguaglianza di Jensen.
La versione indebolita di stretta convessità della funzione lagrangiana e l'unicità di eventuali punti di minimo.
L'equazione di Eulero-Lagrange $(EE)'$. Equivalenza tra (EE) e (EE)' per soluzioni u_0 che non hanno tratti costanti.
Nota 5Lez. pag. 30-39

11/03/20 (2 ore):

Se f non dipende esplicitamente da x (caso autonomo), allora $\Phi(u,\xi) := f(u,\xi) - \xi f_\xi(u,\xi)$ è un integrale primo del funzionale F. Equivalenza tra (EE) e $\Phi(u_0, u_0')$= costante per soluzioni u_0 che non hanno tratti costanti.
L'equazione di Eulero-Lagrange (EE) (o (EED)) e gli estremali (e loro natura) di F:

Caso 1): $f(x,u,\xi) = f(\xi)$.
Caso 1.a: f strettamente convessa; Caso 1.b: f convessa. La retta come soluzione del problema di minimo. Unicità/non unicità del minimo. Curva di minima lunghezza (caso non-parametrico). Problema di minimo di $F(u) = \int_0^2 (u'(x))^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0) = 5, u(2) = 10\}$.
Caso 1.b: f non-convessa. Esempio $f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$. Discussione sull'esistenza (o non) di un punto di minimo per $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\, dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = \lambda\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Convessificata di f.
Nota 6Lez. pag. 40-49

12/03/20 (2 ore):

Lemma trivial (condizione sufficiente per la minimalità mediante funzionale ausiliario).

Caso 2): $f(x,u,\xi) = f(x,\xi)$.
Commento sul caso generale. L'esempio di Weierstrass e variante. Ricerca del punto di minimo di $F(u) = \int_1^2 [u'(x)(1 + x^2 u'(x)]\, dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = 3, u(2) = 5\}$. (Esercizio)

Caso 3): $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$.
Caso 3.a: f convessa ($F(u) = \int_{-1}^1 [\frac{k}{2}(u'(x))^2 + gu(x)]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 0\}$; interpretazione fisica del funzionale: corda elastica).
Caso 3.b: f non convessa. Studio del problema di minimo di $F_\lambda(u) = \int_0^\pi [(u'(x))^2 - \lambda^2 (u(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0) = 0, u(\pi) = 0\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ (solo impostato).
Nota 7Lez. pag. 50-60

16/03/20 (2 ore):

Disuguaglianza di Poincarè. Disugaglianza di Poincarè-Wirtinger. Corollario.
Studio del problema di minimo di $F_\lambda(u) = \int_0^\pi [(u'(x))^2 - \lambda^2 (u(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0) = 0, u(\pi) = 0\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'integrale primo di $F(x) = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}|x'(t)|^2 - V(x(t))]\, dt$ e la conservazione dell'energia totale (interpretazione fisica dell'integrale primo per F per funzionali con lagrangiana non dipendente esplicitamente da x).

Caso 4): $f = f(x, u, \xi)$
$F(u) = \int_0^1 [\frac{1}{2}(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$; g continua assegnata; esistenza di un unico estremale in X che risulta essere minimo (caso $g(x) = -x+1$) asciato per esercizio).
$F(u) = \int_0^{2\pi} [(u'(x))^2 + (u(x) - g(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi]) : u(0) = 0, u(2\pi) = \beta\}$; g continua assegnata; esistenza di un unico estremale in X che risulta essere minimo (solo impostato).
Nota 8Lez. pag. 61-71

18/03/20 (2 ore):
Studio del problema di minimo per $F(u) = \int_0^{2\pi} [(u'(x))^2 + (u(x) - g(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi]) : u(0) = 0, u(2\pi) = \beta\}$ e $g(x) = \sin 4x$.
Studio del problema della brachistocrona: non-convessità della funzione lagrangiana. Trucco per superare questa 'mancanza'. L'integrale primo legato al funzionale della brachistocrona $T(u)$. La soluzione (espressa in forma parametrica) è un arco di cicloide.
Metodo risolutivo per equazioni differenziali del tipo $F(y, y') = 0$ (per i curiosi, giustificazione delle scelte fatte nella risoluzione dell'integrale primo legato al funzionale della brachistocrona: vedi [materiale didattico]; non svolto a lezione).
L'arco di cicloide come unico punto di minimo per il funzionale della brachistocrona $T(u)$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, b]) : u(0) = 0, u(b) = \beta, u > 0 \text{ su }]0, b]\}$. Tempo minimo di percorrenza.
Confronto con il tempo di percorrenza lungo una retta. Ancora qualche osservazione sulla brachistocrona: confronto con il tempo di percorrenza lungo una semicirconferenza. Tautocronia della cicloide (solo accennato) [vedi materiale visivo e animato on line].
Nota 9Lez. pag. 72-82

19/03/20 (2 ore):
Studio del problema delle superfici di rotazione di area minima. Funzioni iperboliche; l'integrale primo legato al funzionale $S(u)$; catenaria, catenoide. Esistenza o non di estremali soddisfacenti le condizioni al contorno. Osservazioni varie sulla loro natura [vedi materiale visivo e animato on line].
Discussione del problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + (u(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$ (visto fino ad ora; eq. di Eulero-Lagrange con dati al bordo di Dirichlet).
Discussione del problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + (u(x))^2]\, dx$ su
- $\widetilde{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = \alpha\}$ (eq. di Eulero-Lagrange con dati al bordo di Dirichlet e di Neumann);
- $\widehat{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b])\}$ (eq. di Eulero-Lagrange con dati al bordo di Neumann);
- $X^* = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = u(b)\}$ (eq. di Eulero-Lagrange con condizioni al bordo periodiche per u e u').
Problema di minimo per $F(u) = \int_0^2 [(u'(x))^2 + (u(x))^2]\, dx$ su vari $X, \widetilde{X}, \widehat{X}$ e X^* . Lasciato per esercizio per $F(u) = \int_0^2 [(u'(x))^2 + u(x)]\, dx$.
Nota 10Lez. pag. 83-94

23/03/20 (2 ore):
Problemi variazionali con vincolo isoperimetrico: Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Il caso convesso.
Applicazione: studio del problema di minimo per $F(u) = \int_0^1 (u'(x))^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ con il vincolo isoperimetrico $G(u) = \int_0^1 u(x)\, dx = 1$.
Il problema della catenaria (il problema del filo pesante). La catenaria nell'architettura [vedi materiale on line].
Nota 11Lez. pag. 95-105

25/03/20 (2 ore):
Il problema di Didone usando i moltiplicatori di Lagrange.

Il problema di Didone usando il teorema di Green nel piano e la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger. Il caso generale.
La disuguaglianza isoperimetrica nel piano (usando la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger generale - dim. solo accennata - e il teorema di Green).
Nota 12Lez. pag. 106-114

30/03/20 (2 ore):

Il lemma di du Bois-Reymond. Un suo corollario importante. Applicazione: regolarità degli estremali deboli di $F(u) = \int_a^b (u'^2 - u^2)dx$. L'equazione di Eulero-Lagrange per f e u di classe $\mathcal{C}^1$. L'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale. Convessità e regolarità di estremali deboli (punti di minimo) (Bootstrap).
Estremali spezzati: l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale e le condizioni di Erdmann-Weierstrass (senza dim.).
Es. 1.: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2 \, dx$ su $Y = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
Nota 13Lez. pag. 115-128

01/04/20 (2 ore):

Es. 1.: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2 \, dx$ su $X^\beta_{\text{tratti}} = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = \beta\}$.
Es. 2.: $F(u) = \int_{-1}^1 (u(x))^2(1 - u'(x))^2 \, dx$ su $X_{\text{tratti}} = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$ e su $X^{\alpha,\beta}_{\text{tratti}} = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1,1]) : u(-1) = \alpha, u(1) = \beta\}$. Interpretazione geometrica delle condizioni di Erdmann-Weierstrass.
Minimi locali (relativi) deboli e forti (stretti). Ovviamente ogni punto di minimo locale (relativo) forte è un punto di minimo locale (relativo) debole. Non vale il viceversa: la funzione identicamente nulla su $[0,1]$ è un punto di minimo relativo debole, ma non forte, per $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u'(x))^4] \, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
Nota 14Lez. pag. 129-138

06/04/20 (2 ore):

Analogamente, la funzione $u_0 \equiv 0$ su $[0,1]$ è un punto di minimo relativo debole, ma non forte, per il funzionale di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3] \, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
Condizioni del secondo ordine per lo studio di punti di minimo deboli/forti: Variazione seconda $\delta^2 F(u,v)$ (semidefinita positiva, positiva, strettamente definita positiva/coercitiva rispetto alla variabile v ad u fissato).
Proposizione (base): i) Condizioni necessarie per punti di minimo relativo debole per F su X .
ii) Condizione sufficiente ($\delta^2 F(u,\cdot)$ strettamente definita positiva o 'coercitiva') affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole per F su X .
La sola positività di $\delta^2 F(u,\cdot)$ non è sufficiente affinchè un estremale debole u di F sia un punto di minimo relativo forte: esempio di Scheeffer ($F(u) = \int_{-1}^1 [x^2(u'(x))^2 + x(u'(x))^3] \, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$) ($u_0 \equiv 0$ non è un punto di minimo locale debole per F su X , anche se $\delta^2 F(u_0, v) > 0$ per ogni $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ con $v(0) = v(1) = 0$, $v \not\equiv 0$).
La coercività $\delta^2 F(u,\cdot)$ non è sufficiente affinchè un estremale debole u di F sia un punto di minimo relativo forte: esempio di Scheeffer ($F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3] \, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$).
Condizione necessaria di Legendre per punti di minimo relativi deboli. Applicazione agli estremali del funzionale $F(u) = \int_0^1 [3(u'(x))^4 - 20(u'(x))^3 + 36(u'(x))^2] \, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$.
Condizione di Legendre stretta. Vari commenti.
Nota 15Lez. pag. 139-151

08/04/20 (2 ore):

Quadro riassuntivo su quanto discusso nella lezione precedente.

Funzione di eccesso di Weierstrass. Condizione necessaria di Weierstrass per punti di minimo relativi forti (senza dim.). Applicazione al funzionale di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3] \, dx$ su $X = \{u \in$

$\mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Qualche commento sull'interpretazione grafica della condizione necessaria di Weierstrass. Dalla condizione necessaria di Weierstrass alla condizione necessaria di Legendre.

La teoria di Jacobi per minimizzanti relativi deboli.
Lagrangiana accessoria e integrale accessorio associato ad una lagrangiana f e un estremale u_0. Equazione (accessoria) di Jacobi. Campi di Jacobi. Null-lagrangian. Equazione differenziale di Riccati e la sua risoluzione. Lemma di Legendre. Lemma di Jacobi.
Nota 16Lez. pag. 152-165

15/04/20 (2 ore):
Teorema: Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e campi di Jacobi (dim).
Funzione di Jacobi. Punti coniugati.
Teorema: Condizioni necessari e sufficienti per minimi relativi deboli e punti coniugati (condizione suff. dim.).
Studio della natura dell'estremale $u_0(x) = x$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^3]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0,\ u(1) = 1\}$.
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^b [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = u(b) = 0\}$, al variare di $b > 0$.
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^\pi [(u'(x))^2 - u^2(x) - u^4(x)]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0) = u(\pi) = 0\}$.
Nota 17Lez. pag. 166-179

20/04/20 (2 ore):
La teoria dei campi di Weierstrass per minimizzanti relativi forti. Calibrazione. Campo di estremali (rispetto alla lagrangiana f) e funzione pendenza.
Campo di estremali e funzione pendenza: casi $f(x,u,\xi) = f(\xi)$ e $f(x,u,\xi) = \xi^2 - u^2$.
Equazione di Eulero (modificata) per il campo (dim.). Equazioni di Carathéodory. Integrale invariante di Hilbert (rispetto ad f).
Teorema: Cond. suff. affinchè un estremale u_0 immerso in un campo di estremali soddisfi $F(u) \geq F(u_0)$ per ogni $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$ che abbia gli stessi valori agli estremi di u_0 (mediante la funzione d'eccesso di Weierstrass) (dim.).
Corollario: Cond. suff. affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo relativo forte per F in X (condizione forte di Weierstrass).
Oss. Un estremale immerso in un campo di estremali è un punto di minimo relativo forte stretto per F in X se vale la condizione forte di Weierstrass stretta.
Nota 18Lez. pag. 180-191

22/04/20 (2 ore):
Dim. Corollario lez. precedente. Campo di Weierstrass.
Corollario: Cond. sufficienti affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo relativo debole (risp. forte) (mediante la condizione di Legendre stretta (risp. forte)) (traccia di dim.)
Teorema: Cond. sufficienti affinchè un estremale sia un punto di minimo relativo forte mediante i punti coniugati e la teoria dei campi (senza dim.).
Studio della natura dell'estremale $u_0(x) \equiv 1$ di $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$. Dim. che $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\, dx$ non ammette minimo assoluto su X.
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
Studio della natura dell'estremale $u_0(x) = kx$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = k\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
Nota 19Lez. pag. 192-204

27/04/20 (2 ore):

Metodo/i indiretto/i. Commenti vari - Ripasso. **Metodo/i diretto/i** . Teorema di Weierstrass sui compatti di $\mathbb{R}^n$. Successione minimizzante.
Prima variante del teorema di Weierstrass (ruolo della compattezza dei sottolivelli della funzione).
Seconda variante del teorema di Weierstrass (ruolo della crescita all'infinito della funzione).
Funzione (seq.) semicontinua inferiormente. Caratterizzazioni della (seq.) semicontinuità inferiore.
Funzione (seq.) coercitiva. Esempi. Osservazioni varie.
Teorema di Tonelli (generalizzazione del teorema di Weierstrass - metodo diretto del CdV): esistenza del minimo. Unicità del punto di minimo se è garantita la stretta convessità.

Es.1) Tentativo di applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto allo studio del problema di minimo per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\, dx$ su $X = L^2(0,1)$; la dim. (diretta) dell'esistenza del minimo (unico) per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\, dx$ su $X = L^2(0,1)$.
Nota 20Lez. pag. 205-217

29/04/20 (2 ore):
Lo spazio $L^2(a,b)$: convergenza forte e convergenza debole. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. La convergenza forte implica la convergenza debole, ma non vale il viceversa (teorema di Riemann-Lebegsue; la sua applicazione garantisce che $u_h(x) = \sin(2\pi hx)$ converge debole in $L^2(0,1)$ alla funzione $u \equiv 0$, ma non forte). Alcuni risultati astratti di continuità/semicontinuità della norma in $L^2(a,b)$ rispetto alla convergenza forte/convergenza debole, e la compattezza seq. della palla chiusa in $L^2(a,b)$ rispetto alla convergenza debole (senza dim.).
1^0 tentativo: Applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto allo studio del problema di minimo per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\, dx$ su $X = L^2(0,1)$ *rispetto alla convergenza forte e il suo fallimento.*
2^0 tentativo: Applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto allo studio del problema di minimo per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\, dx$ su $X = L^2(0,1)$ *rispetto alla convergenza debole.*

Es. 2) Tentativo di applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto ad un funzionale integrale dipendente dalla funzione u e dalla derivata u' : $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\, dx$, con $g \in L^2(a,b)$ assegnata.

Road map del metodo diretto : l'approccio generale per provare l'esistenza di un minimo per funzionali.

Strada facendo si vedrà la necessità di introdurre un nuovo spazio di funzioni e una convergenza 'naturale' data dal problema. A partire da $X = \{u \in C^1([a,b]) : u(a) = u(b) = 0\}$, si ha $\inf_X F(u) < +\infty$; sia $(u_h)_h$ una successione minimizzante per F in X; risulta che $(u'_h)_h$ è limitata in $L^2(a,b)$; segue che (a meno di passare ad una sottosuccessione) la successione $(u'_h)_h$ converge debolmente ad una funzione $v \in L^2(a,b)$.
Nota 21Lez. pag. 218-226

04/05/20 (2 ore):
Continuazione della traccia iniziata nella lez. 21: La successione $\{u_h\}_h$ è equilimitata ed equicontinua in $\mathcal{C}^0([a,b])$. e teorema di Ascoli-Arzelà (compattezza in $\mathcal{C}^0([a,b])$). La necessità di introdurre un nuovo spazio di funzioni e una convergenza 'naturale' data dal problema.
Funzioni assolutamente continue $AC([a,b])$: definizioni (di Tonelli e di Vitali) a confronto e alcune proprietà, confronto con le funzioni lipschitziane, con le funzioni uniformemente continue, $\mathcal{C}^1([a,b])$.
Esempio di funzione in $AC([0,1])$, ma non in $\mathcal{C}^1([a,b])$. Lo spazio delle funzioni $H^1_0(a,b)$. Il problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\, dx$ su $X = H^1_0(a,b)$.
Un risultato di esistenza di un punto di minimo per $F(u) = \int_a^b [f(u'(x)) + g(x)u(x)]\, dx$ su $X = H^1_0(a,b)$.
Cenno alla regolarità del punto minimo se i dati sono regolari.
Un risultato generale di esistenza; l'equazione di Eulero-Lagrange; risultato di regolarità.
Nota 22Lez. pag. 227-235