

Equazioni differenziali del tipo $F(y, y') = 0$

Consideriamo un'eq. diff del tipo

$$F(y, y') = 0.$$

Sia $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ una soluzione. OSS. che al variare di $x \in I$

i) $x \mapsto (u(x), u'(x))$

sono rappresentazioni parametriche di un arco $\mathcal{C}$ della curva di eq. $F = 0$ nel piano yy' . D'altra parte sia nota una rappresentazione parametrica

ii)
$$\begin{cases} y = A(s) \\ y' = B(s) \end{cases} \quad s \in J$$

di tale arco $\mathcal{C}$. Supponiamo che s e $x(s)$ descrivano lo stesso punto della curva nelle due rappresentazioni i) e ii), cioè

$$\begin{cases} u(x(s)) = A(s) \\ u'(x(s)) = B(s). \end{cases}$$

Cerchiamo di individuare una rappresentazione parametrica del grafico di u nella forma

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s). \end{cases}$$

Deve essere ovviamente

$$y(s) = u(x(s)).$$

Quindi

iii)
$$\frac{dy}{ds} = u'(x(s)) x'(s).$$

Questo ci dà

$$A'(s) = B(s) x'(s),$$

quindi, ricavando $x'(s)$ e integrando

$$\begin{cases} x = x(s) = \int \frac{A'(s)}{B(s)} ds \\ y = y(s) = A(s). \end{cases}$$

□

Applicazione al caso della brachistocrona: Abbiamo ottenuto mediante l'integrale primo per $f(u, \xi) = \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{u}}$ la condizione

$$u(1+u'^2) = \frac{1}{c^2}.$$

Si tratta di un'equazione della forma $F(u, u') = 0$.

Seguiamo il metodo di riduzione sopra presentato. Una rappresentazione parametrica della curva $u(1+u'^2) = \frac{1}{c^2}$ è

$$\begin{cases} u = \frac{1}{c^2(1+\tan^2 \frac{s}{2})} = \frac{1}{2c^2} (1+\cos s) \doteq A(s) \\ u' = \tan \frac{s}{2} \doteq B(s) \end{cases}$$

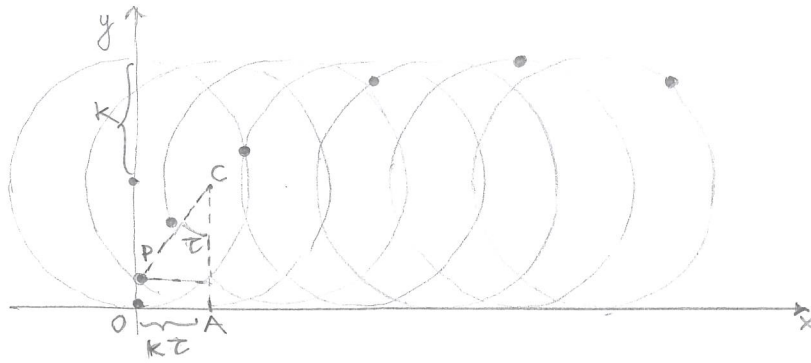
Quindi

$$\begin{aligned} x(s) &= \int \frac{A'(s)}{B(s)} ds = \frac{1}{2c^2} \int \frac{-\sin s}{\tan \frac{s}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2c^2} \int \frac{-2 \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2}}{\tan \frac{s}{2}} ds = \frac{1}{c^2} \int -\cos^2 \frac{s}{2} ds \\ &= -\frac{1}{2c^2} (s + \sin s) + K \end{aligned}$$

con K costante arbitraria. Quindi

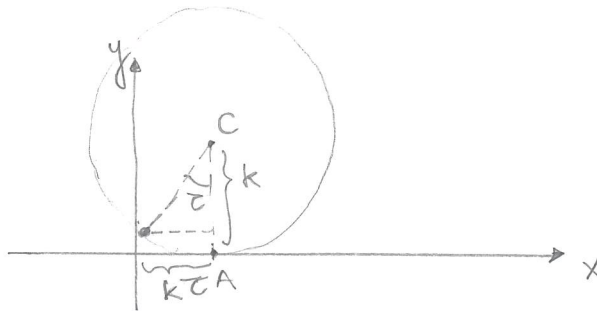
$$\begin{cases} x(s) = K - k(s + \sin s) \\ y(s) = k(1 + \cos s). \end{cases} \quad k = \frac{1}{2c^2} > 0$$

Si tratta delle equazioni parametriche di una cicloide, cioè del luogo delle posizioni assunte da un pt. fissato su una circonferenza di raggio k quando viene fatta rotolare su una retta come in figura:



CICLOIDE: le coordinate di P sono $x = k\tau - k\sin\tau = k(\tau - \sin\tau)$

$$y = k - k\cos\tau = k(1 - \cos\tau)$$



Le coordinate del punto dopo la rotazione di un angolo τ come in figura sono date da

$$x = k(\tau - \sin\tau)$$

$$y = k(1 - \cos\tau).$$

Il cambiamento di parametro $\tau = \pi - s$ dà

$$\begin{aligned} x &= k(\pi - s - \sin(\pi - s)) = \underline{k\pi} - k(s + \sin s) \\ &= K - k(s + \sin s) \end{aligned}$$

$$y = k(1 - \cos(\pi - s)) = k(1 + \cos s)$$

Rispetto a questa curva l'arco di minima discesa è capovolto (e opportunamente traslato).