Università degli Studi di Trento - CdL in Matematica (LT)
Corso: Calcolo delle Variazioni - a.a. 2019/20
docente: Prof. Anneliese Defranceschi

Esercizi (first round... per chi ha voglia di provarci...)

Esercizio 1:
Sia $f(x,u,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - u$ per $(x,u,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Provate che $u \equiv 1$ è soluzione dell'equazione (EE)', ma non dell'equazione di (EE) (equazione di Eulero-Lagrange).

Esercizio 2:
Sia $h \in \mathcal{C}^0([a,b])$ tale che

$$\int_a^b h(x)u(x)\,dx = 0 \qquad \forall u \in X_0 = \{u \in \mathcal{C}^0([a,b]) : \int_a^b u(x)\,dx = 0\}\,.$$

Provate che $h(x) = c$ (costante) su $[a,b]$ (Sugg.: applicate opportunamente il lemma di Du Bois-Reymond).

Esercizio 3:
Sia $F(u) = \displaystyle\int_0^1 |u'(x)|\,dx$ e $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$. Provate che il problema di minimo $\inf\limits_{u\in X} F(u)$ ha infinite soluzioni.

Esercizio 4:
Per ciascuno dei seguenti problemi, determinate l'unica (perchè) funzione minimizzante per F in X:

a) $F(u) = \displaystyle\int_0^1 [u'^2(x) + 2e^x u(x)]\,dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}\,;$

b) $F(u) = \displaystyle\int_1^2 [x^2 u'^2(x) + 2u^2(x)]\,dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = 1, u(2) = 5\}$ (Sugg. : L'equazione differenziale ha due soluzioni linearmente indipendenti della forma x^p, $p \in \mathbb{R}$);

c) $F(u) = \displaystyle\int_0^{1/2} [u(x) + \sqrt{1 + u'^2(x)}]\,dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\frac{1}{2}]) : u(0) = -1, u(\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\}\,;$

d) $F(u) = \displaystyle\int_1^8 [u'^2(x) - 4u(x)]\,dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,8]) : u(1) = 2, u(8) = -\frac{37}{4}\}\,;$

e) $F(u) = \displaystyle\int_1^8 [u'^2(x) - 4u(x)]\,dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,8]) : u(1) = 2, u(8) = -\frac{37}{4}\}\,.$

Esercizio 5:

a) Provate che per ogni $x \in [1,2]$ fissato, la funzione $(u.\xi) \mapsto f(x,u,\xi) = x\xi + u$ è convessa, ma non strettamente convessa su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) Trovate più di una funzione minimizzante il funzionale $F(u) = \displaystyle\int_1^2 [xu'(x) + u(x)]\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = 1, u(2) = 2\}$?

Esercizio 6: Provate che non esistono estremali ammissibili per il funzionale $S(u)$ (problema della superficie di rotazione di area minima) relativi a $A = (a,\alpha) = (0,2)$ e $B = (e,2)$ (l'uso di un software grafico è ammesso!)

Esercizio 7: Studiate il problema di minimo di $F(u) = \displaystyle\int_0^1 [u'^2(x) + (u(x) - x^2)^2]\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$ (in $\widetilde{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0\}$; in $\widehat{X} = \mathcal{C}^1([0,1])$, rispettivamente).

Esercizio 8:
Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange determinate l'eventuale funzione minimizzante per F in X_G:

a) $F(u) = \displaystyle\int_0^1 u'^2(x)\,dx \qquad X_G = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1, G(u) = \int_0^1 xu'(x)\,dx = 1\}\,;$

b) $F(u) = \displaystyle\int_0^1 [u'^2(x) + u]\,dx \qquad X_G = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1, G(u) = \int_0^1 u(x)\,dx = 1\}\,.$

Esercizio 9:
Usate due metodi diversi per provare che non ci sono estremali spezzati per il problema di minimo per $F(u) = \displaystyle\int_1^2 x^4 u'^2(x)dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = \alpha, u(2) = \beta\}\,.$

Esercizio 10:
Usando le due condizioni di Erdmann-Weierstrass individuate tutti gli estremali spezzati per il problema di minimo per $F(u) = \displaystyle\int_a^b [u'^2(x) + u'^3(x)]dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}\,.$

Esercizio 11:
L'estremale ammissibile di $F(u) = \displaystyle\int_1^2 (1 - u'^2(x))^2 dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = 1, u(2) = \frac{1}{2}\}$ soddisfa la condizione necessaria di Legendre?

Esercizio 12:
Sia $F(u) = \displaystyle\int_0^b \sqrt{\cos^2 u(x) + u'^2(x)}\,dx$ e sia $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = 0, u(b) = 0\}$ con $b > 0$ assegnata.

a) Provate che $u_0(x) \equiv 0$ su $[0,b]$
   i) è un estremale di F su X ;
   ii) soddisfa la condizione necessaria di Legendre stretta.

b) Scrivete l'integrale accessorio $Q(v)$ rispetto ad f e u_0 (i.e. $Q(v) = \frac{1}{2}\delta^2 F(u_0, v)$ per ogni $v \in X$). Determinate l'equazione (accessoria) di Jacobi e la funzione di Jacobi.

c) Usando la teoria dei campi di Jacobi (punti coniugati) discutete la natura dell'estremale u_0 su $[0,b]$ se $b < \pi$ oppure se $b > \pi$.