Università degli Studi di Trento - CdL in Matematica (LT)
Corso: Calcolo delle Variazioni - a.a. 2019/20
docente: Prof. Anneliese Defranceschi

Esercizi (second round... per chi ha voglia di provarci...)

Esercizio 1:

i) Sia $F(u) = \int_0^1 \sqrt{1+u'^2(x)}dx$ e $X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$.

a) Sia $u_\alpha(x) = x + \alpha$ con $x \in [0,1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, e $G = [0,1] \times \mathbb{R}$. Verificate che $h : [0,1] \times \mathbb{R} \to G$ con $h(x,\alpha) = (x, u_\alpha(x))$ è un campo di estremali (rispetto alla lagrangiana $f(x,u,\xi) = f(\xi) = \sqrt{1+\xi^2}$) e $P(x,z) = 1$ per ogni $(x,z) \in G$ la funzione pendenza.
b) Sia $H(u)$ l'integrale invariante di Hilbert per ogni $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Verificate che il valore di H dipende solo dai valori di u agli estremi dell'intervallo $[0,1]$.

ii) Usando la teoria dei campi di Weierstrass provate che $u_0(x) = kx$ minimizza $F(u) = \int_0^1 \sqrt{1+u'(x)^2}\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = k\}$ con $k \in \mathbb{R}$. Quale problema state risolvendo?

Esercizio 2:

Sia $F(u) = \int_0^2 [u'(x)^2 - u^2(x)u'(x)^4]\,dx$ e sia $X^a = \{u \in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0) = u(2) = a\}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Verificate che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la funzione costante $u_a \equiv a$ è un estremale per F su X^a.
b) Discutete per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione u_a soddisfa la condizione necessaria di Weierstrass per minimizzanti relativi forti per F su X^a.
c) Discutete per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione u_a soddisfa la condizione necessaria di Legendre per minimizzanti relativi deboli per F su X^a.

Esercizio 3:

Sia $F(u) = \int_1^3 [\frac{1}{2}u'^2(x) + u'(x)u(x) + u'(x) + u(x)]dx$ e $X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,3]) : u(1) = 0, u(3) = 4\}$.

i) Determinate gli estremali di F.

ii) a) Osservate che $u_\alpha(x) = \dfrac{x^2}{2} + \alpha x$ è una famiglia di estremali (rispetto alla lagrangiana f data) passanti per $(0,0)$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinate la funzione pendenza su $G = [1,3] \times \mathbb{R}$.
b) Calcolate l'integrale invariante di Hilbert $H(u)$ per $u(x) = 2(x-1)$ e per $u = (x-1)^2$. Osservate che $H(u) = \frac{235}{12}$.

iii) a) Osservate che $\widetilde{u}_\alpha(x) = \dfrac{x^2}{2} + \alpha$ è anche una famiglia di estremali per F. Determinate la funzione pendenza su $G = [1,3] \times \mathbb{R}$.
b) Calcolate l'integrale invariante di Hilbert $H(u)$ per $u(x) = 2(x-1)$ e per $u = (x-1)^2$. Osservate che $H(u) = \frac{59}{3}$.
c) Osservate che $u(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) \in X$ è un estremale per F immerso nella famiglia di estremali $\widetilde{u}_\alpha$ definiti in iii)a) (ma non in $u_\alpha(x)$ definito in ii)a)). Verificate che u è un punto di minimo assoluto di F su X.

Esercizio 4:

a) Usando la teoria dei campi di Weierstrass provate che $u_0 \equiv 0$ è un minimizzante assoluto (stretto) per il funzionale $F(u) = \int_0^b [u'(x)^2 + 2u(x)u'(x) - 16u^2(x)]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = 0, u(b) = 0\}$ se $0 < b < \frac{\pi}{4}$.
b) Provate che F non ammette minimo su X se $b > \frac{\pi}{4}$.