Matematica e Architettura

– *Cosimo De Mitri* –

Prendete una catenella e mantenetela sospesa in aria tenendola per gli estremi. Dopo un po' di oscillazioni, essa si fermerà nella sua naturale posizione di equilibrio stabile.
Che tipo di conformazione pensate che assumerà?

Se avete risposto che la forma sarà quella di una parabola, vi siete sbagliati. Ma non è il caso che vi sentiate mortificati per l'errore; piuttosto siate contenti di essere in buona, in ottima compagnia, se è vero che anche il grande Galileo Galilei si è sbagliato allo stesso modo. Fu poi verso la fine del 1600 che Huygens, Leibniz e i fratelli Johann e Jakob Bernoulli dimostrarono che la linea in questione è una curva non algebrica, cui fu dato il nome di *catenaria*.

La risoluzione del problema si fonda sull'idea che la posizione di equilibrio corrisponde alla condizione di *minimo energetico*. Per dirla con Eulero, *nulla accade nell'universo che non faccia capo a qualche principio di massimo o di minimo*.
Sul piano strettamente matematico, il metodo utilizzato per la risoluzione è chiamato *calcolo delle variazioni*, che storicamente nasce proprio sulla spinta del problema della catenaria e di un altro importante problema, quello dela *curva brachistocrona*.

L'equazione della catenaria è

$$y = a \cosh \frac{x}{a} = a \, \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \, .$$

Il simbolo a è un parametro strettamente legato al grado di apertura della curva, che in effetti può essere più o meno slargata, proprio come accade per la parabola. Il simbolo *cosh* sta ad indicare la funzione coseno iperbolico, il cui significato è esplicitato nella parte più a destra della formula. Qui compare il simbolo e, che rappresenta il cosiddetto numero di Nepero, circa uguale a 2,718, il quale è definito come il limite di una particolare successione,

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \, ,$$

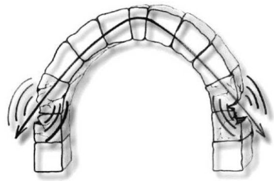
oppure come il risultato di una particolare somma infinita,

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots\ldots .$$

Nei denominatori, il numero n seguito dal punto esclamativo sta ad indicare il prodotto dei numeri da 1 ad n (ad esempio, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$); a parte il caso $0!$, a cui si conviene di assegnare il valore 1.

La catenaria è chiamata anche *funicolare*, perché la si può ottenere usando una fune invece che una catena. I cavi dell'alta tensione sono esempi di catenarie che abbiamo quotidianamente sotto i nostri occhi. Un terzo nome per la catenaria è *velaria*, a ragione del fatto che la curva ha la forma della sezione orizzontale di una vela gonfiata dal vento: il vento agisce sulla vela così come la forza di gravità agisce sulla catenella o sulla fune.

Capovolgendo la curva catenaria si ottiene il cosiddetto *arco catenario*. Si tratta di un arco che, se realizzato ad esempio in muratura, presenta una distribuzione uniforme del carico, tanto da meritare anche il nome di *arco equilibrato*. Le linee di forza lungo le quali si scarica il peso restano contenute all'interno della struttura e vanno a finire interamente sulle due basi d'appoggio. Invece nell'arco romano, che ha la forma di un semicerchio, le linee di forza spingono verso l'esterno in prossimità delle basi, tanto da rendere necessaria una adeguata controspinta, che può essere ottenuta da altri archi affiancati oppure da contrafforti costruiti appositamente.

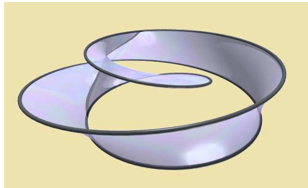


Per via di queste sue proprietà, l'arco catenario è stato utilizzato nella costruzione di cupole, ponti e viadotti.
Ne sono esempi: la cupola della *cattedrale di St Paul* a Londra, progettata da *Robert Hooke*, il *ponte Salgina-Tobel* in Svizzera, progettato da *Robert Maillart*, e il *viadotto ferroviario di Garabit* in Francia, progettato da *Gustave Eiffel*. E una menzione particolare merita l'architetto spagnolo *Antoni Gaudì*, che dell'arco catenario ha fatto – non solo per ragioni di staticità ma evidentemente anche per puro gusto estetico – un uso sistematico; ad esempio nella *Casa Battlò* e nella *Sagrada Famìlia*.

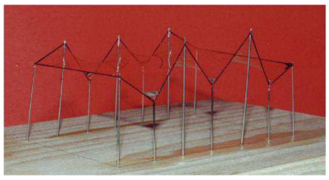
A proposito di minimo energetico, dopo l'esperienza della catenella sospesa, provate a fare un'altra esperienza, questa volta usando un telaio di filo metallico ed una bacinella d'acqua in cui sia stato sciolto del sapone. Il telaio deve essere formato da un manico che termina con due cerchi uguali e coassiali, disposti uno sotto l'altro ad una certa distanza. Immergete i cerchi nell'acqua saponata e sollevate; noterete che si è formata una pellicola di liquido saponoso che unisce i due cerchi. Il *principio del minimo* pretende che il film saponoso debba avere la minima estensione possibile, in modo che sia minima la tensione superficiale cui è sottoposto il liquido.

Ci si aspetterebbe allora una configurazione a forma cilindrica; e invece la pellicola non ha un profilo rettilineo, bensì un profilo a forma di ... catenaria.

La superficie è chiamata *catenoide*, e fu Eulero nel 1744 il primo a dimostrare matematicamente che essa è proprio quella di area minima fra tutte le superfici aventi i due cerchi come bordo. In seguito il fisico belga Plateau, benché ostacolato da una quasi totale cecità, iniziò lo studio delle forme assunte dalle lamine di liquido saponoso, e da allora il problema di determinare la superficie di area minima fra tutte quelle aventi un bordo assegnato è chiamato *problema di Plateau*.



L'architetto tedesco *Otto Frei*, attivo nel 1900, ha fatto grande uso delle pellicole saponose per ottenere forme da utilizzare nella progettazione delle cosiddette *costruzioni leggere*. Per ottenere le superfici minimali, che avrebbero garantito anche un considerevole abbattimento dei costi, egli utilizzava degli aghi conficcati in una placca di plexiglas e ne collegava le estremità libere con fili sottilissimi; quindi immergeva il dispositivo in una soluzione saponata e riusciva così ad ottenere la pellicola fluida di area minima adagiata sui fili. Nelle costruzioni reali si trattava poi di sostituire gli aghi con piloni di sostegno, i fili con cavi d'acciaio e la pellicola fluida con una *tensostruttura*, solitamente una tenda in materiale sintetico trasparente. Con questa tecnica è stato realizzato il *Padiglione della Germania Ovest* all'Expo '67 di Montreal e la copertura dello *Stadio Olimpico* di Monaco di Baviera.



In Colorado, nella città di Breckenridge, si svolge ogni anno il *Campionato Internazionale di Scultura in Ghiaccio*. Fra le squadre partecipanti alla gara del 1999 ve ne fu una composta da quattro matematici e dallo scultore statunitense *Helaman Ferguson*. Essi, partendo da un blocco di ghiaccio di 20 tonnellate, ne rimossero 14 e realizzarono la superficie minima che era stata scoperta alcuni anni prima dal matematico brasiliano Celso Costa, formata grosso modo da una catenoide attraversata da un piano. La scultura fu tra quelle che durarono più a lungo, mantenendo intatti i dettagli della sua struttura fino al completo scioglimento.

Questo articolo è stato pubblicato su SMELLS, *opuscolo d'arte e creatività*,
stampato presso ARTI GRAFICHE PANICO – GALATINA (LE)