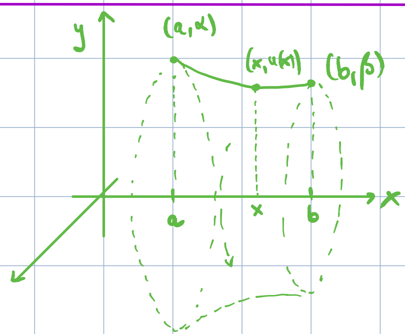
10 Lez. 19/03 (registrata 19/03)

SUPERFICIE DI ROTAZIONE DI AREA MINIMA



Ricordiamo che la ns. superficie è generata dalla rotazione di un curva del piano, esprimibile come grafico di una funzione non-negativa $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, attorno all'asse x e la sua area è data da

$$S(u)=2\pi\int_a^b u(x)\sqrt{1+u'^2(x)}\,dx.$$

Dobb. minimizzare questo funz. $S(u)$ sull'insieme

$$X=\{u\in C^1([a,b]) : u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta,\ u(x)>0\}.$$

Vogliamo individuare gli estremali di S sfruttando l'integrale primo Φ.
Vedremo che per certi dati ci sarà un estremale, due estremali o nessun estremale!

La lagrangiana (trascurando la costante 2π) è data da $f(u,\xi)=u\sqrt{1+\xi^2}$ (non convessa!), $f_\xi=\dfrac{u\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$. Allora $\Phi(u,u')=[f(u,u')-u'f_\xi(u,u')]=$
$=c$ si scrive

$$u\sqrt{1+u'^2}-u'\frac{uu'}{\sqrt{1+u'^2}}=c \quad \text{su } [a,b]$$

ossia

$$\frac{u(x)}{\sqrt{1+u'^2(x)}}=c \quad \text{costante positiva}$$

o analog. $$\boxed{u(x)=c\sqrt{1+u'^2}} \quad (*)$$

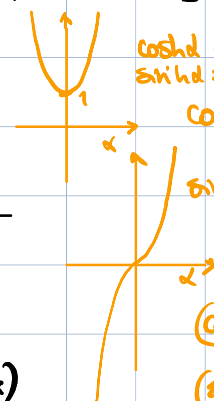
(oss. che le funz. costanti sono soluz. di quest'eq, ma esse sono escluse dall'eq. di (EE). Abb. già oss. che le soluzioni di $\Phi(u,u')=c$ sono le sol. dell'eq. di (EE) se consid. solo soluz. u che non hanno tratti costanti).

(oss. che tale eq. risulta in forma normale equiv. a $u'(x)=\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1}$
e è risolubile integrando mediante la sep. delle variabili. Fine lez.)

Svolgiamo tale eq. procedendo con il seg. trucco; poniamo

$u(x) = c\cosh(v(x)) = c\,\frac{e^{v(x)}+e^{-v(x)}}{2}$, $v:[a,b]\to\mathbb{R}$

è da determinare.



$\cosh\alpha : \mathbb{R}\to[1,+\infty[$
$\sinh\alpha : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$
$\sinh\alpha = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$

Otteniamo in ⊛

$$\cancel{c}\cosh(v(x)) = \cancel{c}\sqrt{1+c^2\sinh^2(v(x))(v'(x))^2}$$

e otteniamo

$$\cosh^2(v(x)) = 1+c^2\sinh^2(v(x))\,v'^2(x)$$

$(\cosh\alpha)' = \sinh\alpha$
$(\sinh\alpha)' = \cosh\alpha$

Dalla relazione $\cosh^2\alpha-\sinh^2\alpha=1$ $\qquad$ $\cosh^2\alpha-\sinh^2\alpha = 1 \quad \forall\alpha$

si ottiene

$$\sinh^2(v(x)) = c^2\sinh^2(v(x))\,v'(x)^2$$

segue che $\frac{1}{c^2} = v'^2(x)$, e quindi $v'(x) = \pm\frac{1}{c}$

e quindi

$$v(x) = \frac{x-x_0}{c} \quad \text{per un certo } x_0\in[a,b]$$

(nota: ho scelto $v'(x)=\frac{1}{c}$ in quanto il coseno iperbolico è una funzione pari, e quindi non cambia nulla quando calcoliamo $\cosh(v(x))$ e quindi

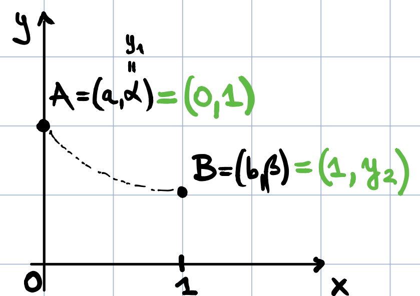
$$\boxed{u(x) = c\cosh\left(\frac{x}{c}+d\right)} \qquad d = \frac{-x_0}{c}$$

al variare di $c>0$, $d\in\mathbb{R}$ due costanti.

Queste curve, che sono gli estremali per $S(u)$, si chiamano catenarie ⊛ e le superfici che esse generano si chiamano catenoidi (⊛ la posizione di equilibrio di un filo sottile, flessibile, inestensibile con densità per unità di lungh. costante è descritta da un coseno iperbolico come vedremo).

Dobbiamo trovare (se esistono) dei valori delle costanti c e d tali che $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$.

Per discutere brevemente questo vediamo un caso semplice:



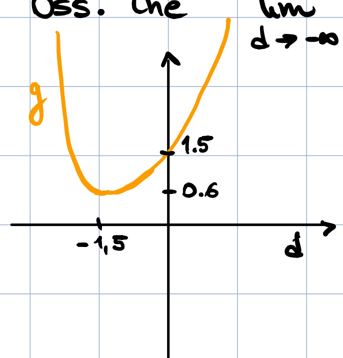
$A=(0,1)$ $B=(1,y_2)$ con $y_2>0$ non fissato. Vogliamo studiare $u(x)$ al variare di $y_2>0$.

Abbiamo che $u(x)$ soddisfa le cond. al bordo se

$$\begin{cases} 1 = u(0) = c \cosh d & \Rightarrow \quad \frac{1}{c} = \cosh d \\ y_2 = u(1) = c \cosh\left(\frac{1}{c} + d\right) & \Rightarrow \quad y_2 = \underbrace{\frac{\cosh(d + \cosh d)}{\cosh d}}_{=:\, g(d)} \end{cases}$$

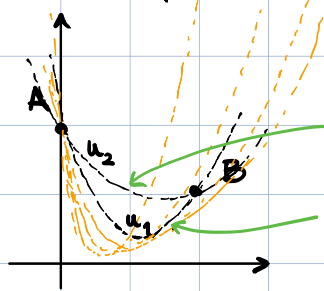
Il parametro d è legato a y_2 mediante $g(d) = y_2$. ovv. $g(d) > 0$

Oss. che $\lim_{d \to -\infty} g(d) = \lim_{d \to +\infty} g(d) = +\infty$ ed $\exists$ minimo.



Posto $y_{min} = \min_{\mathbb{R}} g(d)$, si ottiene che per $y_2 < y_{min}$, non c'è soluzione dell'eq. $y_2 = g(d)$ e quindi non c'è estremale di S passante per A e B.

Se $y_2 = y_{min}$ esiste un estremale di S per A e B; se $y_2 > y_{min}$ ce ne sono almeno due estremali passanti per A e B. Solo uno di questi estremali risulta essere un pt. di minimo per S su X. Lo studio approfondito sulla minimalità degli estremali si fa mediante la teoria di Jacobi.



pt. di minimo per S in X

non sarà pt. di minimo per S in X

$\blacksquare$

Prima di passare allo studio di pbm. di minimo con vincolo isoperim. (*)

Cenno (mediante un esempio) allo studio di un pbm. di minimo per F sull'insieme delle funzioni ammissibili con un solo estremo fissato / con estremi liberi / estremi periodici (nascita delle condizioni al bordo!)

((*) pbm. della catenaria / pbm. di Didone)

(1) $$F(u) = \int_a^b \left[u'^2 + u^2\right] dx \qquad \inf_{u \in X} F(u) \qquad \text{funz. strett. convesso}$$

$$X = \{u \in C^1([a,b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}$$

assegnati

$$\rightsquigarrow Z = \{v \in C^1([a,b]) : v(a) = v(b) = 0\}$$

$\rightsquigarrow \phi(t) = F(\underbrace{u+tv}_{\in X})$ $\quad$ u è pt. minimo $\Rightarrow$ $t=0$ è pt. di min. di ϕ $\Big\} \rightarrow \phi'(0) = 0$ $\;\;\; \phi'(0) = \frac{d}{dt} F(u+tv)\Big|_{t=0}$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} F(u+tv)\Big|_{t=0} = \int_a^b \left[u'v' + uv\right] dx = 0 \quad \forall v \in Z \qquad \text{(EED)}$$

Integrando per parti

$$\left[u'(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u''v + \int_a^b uv\,dx = 0 \qquad \forall v \in Z$$

$v(a)=0$
$v(b)=0$

$\underset{0}{\parallel}$

$$\Rightarrow \int_a^b (-u''+u)v\,dx = 0 \qquad \forall v \in Z$$

$\Rightarrow$
lemma fond. del CdV

$$-u''+u=0 \quad \text{su } [a,b] \qquad (EE)$$

$\rightsquigarrow$ $u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$ sono tutte le possibili soluzioni di (EE)

imponendo $u(a)=\alpha$, $u(b)=\beta$, se trovo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ t.c. le cond. di bordo vengono soddisfatte, abbiamo trovato che il pbm. ammette minimo e abbiamo trovato l'unico (possibile) pt. di minimo.

$$\begin{cases} u''=u & \text{su } [a,b] \\ u(a)=\alpha \\ u(b)=\beta \end{cases}$$

(eq. diff. del 2° ordine)

cond. al bordo di Dirichlet (DBC)

sono già scelte in X !!

$\square$

(2) $F(u) = \int_a^b \left[u'^2 + u^2\right] dx \qquad \inf_{u \in \tilde{X}} F(u)$

$\tilde{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha\}$ (un solo estremo fissato)

$\tilde{Z} = \{v \in \mathcal{C}^1([a,b]) : v(a)=0\}$

$\underset{\in \tilde{X}}{u} + t\underset{\in \tilde{Z}}{v} \in \tilde{X}$

Procediamo come in ① e arriviamo a

$$\int_a^b [u'v' + uv]\,dx = 0 \qquad \forall v \in \tilde{Z}$$

Integrando per parti

$$\Big[u'(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b [u''v + uv]\,dx = 0 \qquad \forall v \in \tilde{Z}$$

$$(*) \qquad u'(b)v(b) - \cancel{u'(a)v(a)} + \int_a^b [-u'' + u]\,v\,dx = 0 \qquad \forall v \in \tilde{Z}.$$

Procediamo in 2 passi:

Passo 1. prendiamo tutte le $v \in \tilde{Z}$: $v(b) = 0$

E quindi dal lemma fond. del CdV

$\Rightarrow \quad -u'' + u = 0 \quad$ su $[a,b]$

Passo 2. grazie al passo 1 riscrivo l'eq. (*) e otteniamo

$$u'(b)\,v(b) = 0 \qquad \forall v \in \tilde{Z}$$

L'unica possibilità è che $u'(b) = 0$

(possiamo scegliere un $v \in \tilde{Z}$: $v(b) = 2020!$)

Quindi abbiamo ottenuto il pbm.

$$\begin{cases} u'' = u & \text{su } [a,b] \\ u(a) = \alpha & \text{(DBC)} \\ u'(b) = 0 & \text{(NBC)} \end{cases}$$

(eq. diff. del 2° ordine)

già scritta in $\tilde{X}$

(Neumann boundary condition)

NATA DOPO!!

$\square$

③ $F(u) = \int_a^b [u'^2 + u^2]\,dx \qquad \inf_{u \in \hat{X}} F(u)$

$$\hat{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b])\}$$ estremi liberi !!

$$\hat{Z} = \{v \in \mathcal{C}^1([a,b])\}$$

Procediamo come nel caso 1 e arriviamo a

$$\Big[u'(x)\, v(x)\Big]_a^b + \int_a^b (-u'' + u)\, v \, dx = 0 \qquad \forall v \in \hat{Z}$$

$$(*) \quad u'(b)v(b) - u'(a)v(a) + \int_a^b (-u'' + u)\, v \, dx = 0 \quad \forall v \in \hat{Z}.$$

Procediamo in 2 passi:

Passo 1. Prendiamo tutte le $v \in \hat{Z}$: $v(a) = v(b) = 0$

Di nuovo dal lemma fond. del CdV

$$-u'' + u = 0 \qquad \text{su } [a,b]$$

Passo 2: Grazie al passo 1 riscrivo $(*)$ e ottengo

$$u'(b)\, v(b) - u'(a) v(a) = 0 \qquad \forall v \in \hat{Z}$$

Scegliamo $v(a) = 0,\ v(b) = 1$: $\Rightarrow$ $\underline{u'(b) = 0}$

poi $v(a) = 1,\ v(b) = 0$: $\Rightarrow$ $\underline{u'(a) = 0}$!!

$$\rightsquigarrow \begin{cases} u'' = u & \text{su } [a,b] \\ u'(a) = 0 & \text{Neumann boundary} \\ u'(b) = 0 & \text{condition in } a \text{ e } b \text{ !!} \end{cases} \qquad \square$$

NATE DOPO!

4 $F(u) = \int_a^b [u'^2 + u^2]\, dx \qquad \inf_{u \in X^*} F(u)$ estremi "periodici" !

$$X^* = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : \ u(a) = u(b)\}$$

$$Z^* = \{ v \in \mathcal{C}^1([a,b]) : v(a) = v(b) \}$$

Procedendo come nei casi sopra deve essere soddisfatta

$$\circledast \quad u'(b)v(b) - u'(a)v(a) + \int_a^b (-u'' + u)\, v\, dx = 0 \quad \forall v \in Z^*$$

Passo 1 : Per $v \in Z^*$: $v(a) = v(b) = 0$ si ottiene come prima

$$-u'' + u = 0 \quad \text{su } [a,b]$$

Passo 2 : Tenendo conto del passo 1 in $\circledast$ si ottiene

$$u'(b)\underbrace{v(b)} - u'(a)\underbrace{v(a)}_{\text{sono uguali }, = k} = 0 \qquad \forall v \in Z^*$$

$$\Rightarrow k\left(u'(b) - u'(a)\right) = 0 \qquad \forall k,$$

basta prendere $k \neq 0$ e si ha $u'(b) = u'(a)$

In conclusione abbiamo

$$\left.\begin{cases} u'' = u & \text{su } [a,b] \\ u(a) = u(b) & \longleftarrow \text{ era in } X \\ u'(a) = u'(b) \end{cases}\right\} \text{(PBC)}$$

NATA DOPO !

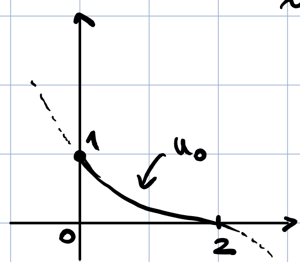
■

. ———— . ———— .

Es. $F(u) = \int_0^2 [u'^2 + u^2]\, dx$

① $X = \{ u \in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0) = 1,\ u(2) = 0 \}$

$$\begin{cases} u'' = u & \text{su } [0,2] \\ u(0) = 1 \\ u(2) = 0 \end{cases}$$



$$\rightsquigarrow \quad u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$u(0) = 1, \qquad u(2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_0(x) = \frac{e^4}{e^4-1} e^{-x} - \frac{1}{e^4-1} e^{x} \quad \text{in } [0,2]$$

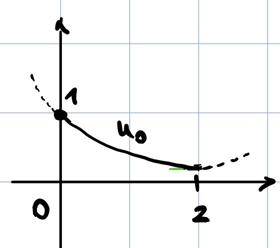
$$F(u_0) = \inf_{u \in X} F(u).$$

$\square$

② $\tilde{X} = \{ u \in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0) = 1 \}$

$$\begin{cases} u'' = u & \text{in } [0,2] \\ u(0) = 1 \\ u'(2) = 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$$



$$\Rightarrow \quad u_0(x) = \frac{e^4}{e^4+1} e^{-x} + \frac{1}{e^4+1} e^{x} \quad \text{in } [0,2]$$

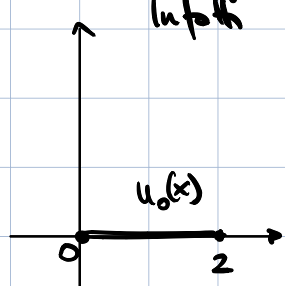
$\square$

③ $\hat{X} = \{ u \in \mathcal{C}^1([0,2]) \}$ Nessuna cond. al bordo!

$F(u) \geq 0 \quad = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$!!

Infatti $\begin{cases} u'' = u & \text{in } [0,2] \\ u'(0) = 0 \\ u'(2) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$ in $[0,2]$

$$\Rightarrow \quad u_0(x) = 0 \quad \text{in } [0,2]$$



④ $X^* = \{ u \in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0) = u(2) \} \rightsquigarrow \begin{cases} u'' = u & \text{in } [0,2] \\ u(0) = u(2) \\ u'(0) = u'(2) \end{cases}$

$$u_0(x) = 0 \text{ su } [0,2] \quad \Leftarrow$$

$\blacksquare$

Es. $F(u)=\displaystyle\int_0^2 \left[u'^2+u\right]dx$

Studiare $\displaystyle\inf_{u\in X} F(u)$, ...

$X=\{u\in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0)=1,\ u(2)=0\}$

$\tilde{X}=\{u\in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0)=1\}$

$\hat{X}=\{u\in \mathcal{C}^1([0,2])\}$ $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\inf_{u\in \hat{X}} F(u)=-\infty$

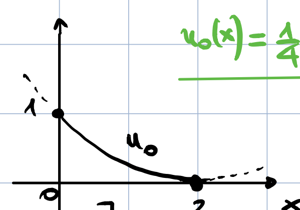
$X^*=\{u\in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0)=u(2)\}$

$\longrightarrow$ $\displaystyle\inf_{u\in X^*} F(u)=-\infty$ $\square$

Abbiamo $f(x,u,\xi)=f(u,\xi)=\xi^2+u$ e procedendo come nell'esempio svolto sopra abbiamo che l'eq. di (EE) si scrive $2u''=1$, quindi $u'(x)=\frac{1}{2}x+c_1$, da cui $u(x)=\frac{1}{4}x^2+c_1x+c_2$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

1) Dobbiamo risolvere $\begin{cases} 2u''=1 \text{ in } [0,2] \\ u(0)=1 \\ u(2)=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $u_0(x)=\frac{x^2}{4}-x+1$

$u_0(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2$



$$\min_{u\in X} F(u)=F(u_0)=\int_0^2\left[\left(\frac{1}{2}(x-2)\right)^2+\frac{1}{4}(x-2)^2\right]dx$$

$$=\int_0^2\left[\frac{1}{4}(x-2)^2+\frac{1}{4}(x-2)^2\right]dx=\frac{1}{2}\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3}. \qquad \square$$

2) Dobbiamo risolvere $\begin{cases} 2u''=1 \text{ in } [0,2] \\ u(0)=1 \\ u'(2)=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $u_0(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2$. $\square$

3) Dobbiamo risolvere $\begin{cases} 2u''=1 & \text{su } [0,2] \\ u'(0)=0 \\ u'(2)=0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow u(x)=\frac{1}{4}x^2+c_1x+c_2$

$\begin{cases} 0=u'(0)=c_1 \\ 0=u'(2)=1+c_1 \end{cases}$ impossibile !!!

Infatti, basta prendere $u_n(x)=-n$ su $[0,2]$.

Allora $u_n(x)\in\hat{X}$ e $\inf_{u\in\hat{X}} F \le F(u_n)=\int_0^2(-n)\,dx=-2n \to -\infty$

$\Rightarrow \inf_{u\in\hat{X}} F(u)=-\infty.$ $\square$

4) Dobbiamo risolvere $\begin{cases} 2u''=1 & \text{su } [0,2] \\ u(0)=u(2) \\ u'(0)=u'(2) \end{cases}$ $\rightsquigarrow u(x)=\frac{1}{4}x^2+c_1x+c_2$

$\begin{cases} c_2=1+2c_1+c_2 \\ c_1=1+c_1 \end{cases}$ impossibile !!!

Come sopra si prova che $\inf_{u\in X^*} F(u)=-\infty.$ $\blacksquare$

• ——— • ——— • ——— •

pag. 83 Abbiamo $\frac{u(x)}{\sqrt{1+u'^2(x)}}=c \quad (>0)$

Ne segue $u^2=c^2(1+u'^2)$ ossia $u'^2=\frac{u^2}{c^2}-1$,

e quindi $u'(x)=\pm\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1}$. Consideriamo

$u'(x)=\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1}$ (vediamo che questa scelta è lecita poiché la funzione coseno iperbolico è pari e quindi $\cosh(x)=\cosh(-x)$). Notiamo che

$$\int\frac{1}{\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-1}}\,dz \underset{z=c\cosh s}{=} \int\frac{c\,\cancel{\sinh s}}{\cancel{\sinh s}}\,ds = cs+c_1 = c\cosh^{-1}\left(\frac{z}{c}\right)+c_1$$

e quindi da $u'(x)=\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1}$ si ha,

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1}}\,dx = \int 1\,dx \ , \text{ ossia } \quad c\cosh^{-1}\left(\frac{u(x)}{c}\right) = x + c_1$$

dove c_1 è una costante, eventualmente diversa dalla costante c_1 sopra. Quindi $\cosh^{-1}\left(\frac{u(x)}{c}\right) = \frac{x}{c} + d$, dove $d = \frac{c_1}{c}$.

Risulta $u(x) = c\cosh\left(\frac{x}{c} + d\right)$. ∎