11 Lez. 23/03 (registrata 23/03)

Problemi variazionali con vincolo isoperimetrico

Vogliamo minimizzare un certo funzionale integrale F tra tutte le funzioni con dati al bordo assegnati per le quali un altro funzionale integrale G assume valore costante.

Questo plom. di minimo vincolato assomiglia a quelli che, in $\mathbb{R}^n$, si risolvono con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange!

E infatti, vale un risultato molto simile, e otteniamo una generalizzazione del teorema 1 (Cond. nec. (EE)), per i plom.

$(P)_G \qquad \inf_{u \in X_G} F(u) \qquad X_G = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta$ (assegnati)

$G(u) = \int_a^b g(x,u,u')\,dx = c\}$

c una costante assegnata.

Teorema (dei moltiplicatori di Lagrange): Siano dati i funz. integrali

$$F(u) = \int_a^b f(x,u,u')\,dx \qquad G(u) = \int_a^b g(x,u,u')\,dx.$$

i) Siano $f, g \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Se $u_0 \in X_G$ è una funzione minimizzante di $(P)_G$ e se $\exists\, \psi \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $\psi(a) = \psi(b) = 0$ t.c. $\delta G(u_0, \psi) \neq 0$, allora $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ (moltiplicatore di Lagrange) tale che, posto $\tilde{F} \doteq F + \lambda G$ si ha

$$\delta \tilde{F}(u_0, v) = 0 \qquad \forall v \in Z$$

$\delta\tilde{F} = \delta F + \lambda \delta G$

ii) Se inoltre $f, g \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $u_0 \in X_G \cap \mathcal{C}^2([a,b])$, allora

$$\frac{d}{dx}\left[\tilde{f}_\xi(x,u_0,u_0')\right] = \tilde{f}_u(x,u_0,u_0') \qquad \forall x \in [a,b],$$

dove

$$\tilde{f}(x,u,\xi) \doteq f(x,u,\xi) + \lambda\, g(x,u,\xi).$$

Oss. Se supponiamo che F e G siano funzione convesse (oppure $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $F+\lambda G$ è convessa) e $\exists\, u_0 \in \mathcal{C}^1([a,b])$ e $\lambda > 0$ t.c. $\delta \tilde{F}(u_0, v) = 0 \quad \forall v \in Z$, allora sappiamo che u_0 minimizza il funzionale $\tilde{F}$ tra tutte le funzioni con lo stesso dato al bordo. In particolare, possiamo dire in questo caso, che u_0 minimizza F tra tutte le funzioni u con lo stesso dato al bordo e con $G(u) = G(u_0)$

$$\left(F(u_0) + \lambda G(u_0) \leq F(u) + \lambda G(u) \quad \forall u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : \begin{matrix} u(a)=\alpha \\ u(b)=\beta \end{matrix} \right.$$

$\Rightarrow F(u_0) \leq F(u)$ e lo stesso per u_0

$\left. \forall u \in X, \ \text{t.c. } G(u) = G(u_0) \right)$

Se poi uno dei due funzionali è strett. convesso, abbiamo anche l'unicità!

Operativamente, se F e G sono convessi, possiamo procedere cercando le soluz. dell' EE per $\tilde{F}$ (con i dati al bordo che ci interessano) e vedere poi se troviamo $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo tale che il funzionale G assuma il valore voluto e che $\tilde{F}$ rimanga convesso. ■

Es.1 Consid. $F(u) = \int_0^1 u'^2(x)\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$

Vogliamo determinare, se esiste, la soluzione del pblm. di minimo

$(P)_G \quad \inf_{u \in X_G} F(u) \qquad X_G = X \cap \left\{ u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : G(u) = \int_0^1 u(x)\,dx = 1 \right\}.$

- $f(x,u,\xi) = f(\xi) = \xi^2$ strett. convessa in ξ
  $g(x,u,\xi) = g(u) = u$ convessa in u.

  Poniamo $\quad \tilde{f}(x,u,\xi) = \xi^2 + \lambda u$, e cerchiamo $\lambda\in\mathbb{R}$ t.c. $\tilde{f}$ rimanga convessa in (u,ξ).

(in questo caso un qualunque $\lambda\in\mathbb{R}$ conserva la convessità di g!)

Dobbiamo risolvere $\frac{d}{dx}\left[\tilde{f}_\xi(x,u,u')\right]=\tilde{f}_u(x,u,u')$

e trovare una soluz. in $X_G\cap C^2([0,1])$.

Abbiamo che l'eq. diventa

$$2u''=\lambda \qquad \forall x\in[0,1],$$

e l'integrale generale risulta $u(x)=\frac{\lambda}{4}x^2+c_1x+c_2$ su $[0,1]$.

$$u\in X \iff u(0)=u(1)=0 \iff \begin{cases} c_2=0, \\ \frac{\lambda}{4}+c_1=0 \end{cases} \Rightarrow c_1=-\frac{\lambda}{4}$$

Risulta che $u_0(x)=-\frac{\lambda}{4}x(1-x)\in X$.

Dal teorema dei moltiplicatori ($\delta G(u,\psi)=\int_0^1\psi(x)\,dx$ $\forall u\in X$;

e quindi $\forall u\in X_G$ $\exists\,\psi\in C^1([0,1])$, $\psi(0)=\psi(1)=0$ t.c. $\delta G(u,\psi)\neq 0$

e quindi, in particolare sarà $\delta G(u_0,\psi)\neq 0$ per qualche ψ)

e dall'oss. possiamo dire (visto che $\tilde{F}$ è strett. convesso)

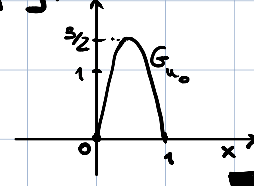
che $u_0(x)=-\frac{\lambda}{4}x(1-x)$ minimizza F su X – è anche unica – con il vincolo $G(u)=G(u_0)$.

Rimane da verificare che possiamo scegliere λ t.c. $G(u_0)=1$.

Abbiamo

$$G(u_0)=1=\int_0^1 u_0(x)\,dx=-\frac{\lambda}{4}\int_0^1 x(1-x)\,dx=-\frac{\lambda}{4}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=-\frac{\lambda}{24}$$

ossia per $\lambda=-24$. Quindi abbiamo trovato l'unica soluz. del probl. $(P)_G$: $u_0(x)=6x(1-x)$ su $[0,1]$.



Dim (teorema dei moltiplicatori)

i) Sia $v \in Z$; $\psi \in Z$ t.c. $\delta G(u_0, \psi) \neq 0$ dato per ipotesi.

Consideriamo funz. in due variabili (che esiste in un intorno dell'origine)

$$\phi(s,t) \doteq G(u_0 + sv + t\psi)$$

Risulta $\phi \in \mathcal{C}^1$, $\phi(0,0) = G(u_0)$, $\phi_t(0,0) = \delta G(u_0, \psi) \neq 0$

Possiamo applicare il teorema delle funzioni implicite (Dini) (*) vedi fine lez.

e troviamo un intorno I di 0 (in $\mathbb{R}$, di $s=0$) e una funzione

di classe $\mathcal{C}^1$, $t(s) : I \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\phi(s, t(s)) = G(u_0) \quad \forall s \in I$$

Inoltre si ha

$$t'(s) = -\frac{\phi_s(s, t(s))}{\phi_t(s, t(s))} \quad \forall s \in I.$$

Abbiamo che $\forall s \in I$ la funzione $u_0 + sv + t(s)\psi \in X_G$

e quindi deve essere (u_0 è per ipotesi una funz. minimizz. in X_G)

posto $\varphi(s) = F(u_0 + sv + t(s)\psi)$
$\varphi(0) \leq \varphi(s) \quad \forall s \in I$
$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$)

$$0 = \frac{d}{ds} F(u_0 + sv + t(s)\psi) \Big|_{s=0}$$

$$= \delta F(u_0, v) + \delta F(u_0, \psi)\, t'(0)$$

$$= \delta F(u_0, v) - \delta F(u_0, \psi) \frac{\delta G(u_0, v)}{\delta G(u_0, \psi)}.$$

La tesi segue allora immediatamente ponendo $\lambda = -\dfrac{\delta F(u_0, \psi)}{\delta G(u_0, \psi)}$.

ii) Da i) abbiamo che $\forall v \in Z$, $\delta F(u_0, v) + \lambda \delta G(u_0, v) = 0$,

ossia $\displaystyle\int_a^b \left[f_\xi(x, u_0, u_0')v' + f_u(x, u_0, u_0')v\right]dx + \lambda \int_a^b \left[g_\xi(\;)v' + \lambda g_u(\;)v\right]dx = 0$

Integrando per parti (i termini con v') e tenendo conto che $v(a)=v(b)=0$ si ha

$$\int_a^b \left\{ -\left[\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x,u_0,u_0') + \lambda g_\xi(x,u_0,u_0')\right]\right] + \left[f_u(x,u_0,u_0') + \lambda g_u(x,u_0,u_0')\right]\right\} v\,dx = 0$$

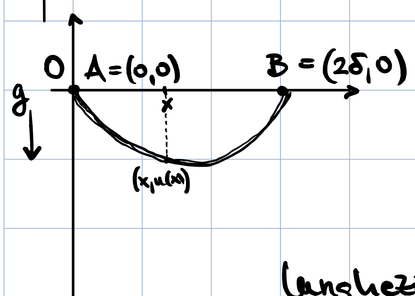
Dal lemma fond. del CdV si ottiene

$$\frac{d}{dx}\left[\tilde{f}_\xi(x,u_0,u_0')\right] = \tilde{f}_u(x,u_0,u_0') \qquad \forall x \in [a,b],$$

dove $\tilde{f}(x,u,\xi) = f(x,u,\xi) + \lambda g(x,u,\xi)$. ■

Es. 2. (il pbm. della catenaria - pbm. del filo pesante)

(Galileo nel 1638; la soluzione è stata indipendent. data da Jakob & Johann Bernoulli; Huygens, Leibniz tra 1690-1692)



Vogliamo trovare il profilo di un lungo filo sottile, flessibile, inestensibile, di lunghezza 2ℓ e densità per unità di lunghezza costante, con i due estremi fissati ad altezza 0 e a distanza 2δ l'uno dall'altro, $\delta < \ell$.

Supponiamo che l'unica forza che agisce sul filo sia la gravità (agente in direzione dell'asse negativa).

Il filo si disporrà in modo da minimizzare l'energia potenziale gravitazionale.

Supp. che il filo geom. sia descritto dal grafico di una funzione $y=u(x)$, $0 \le x \le 2\delta$; l'energia potenziale dell'intero filo è data, a meno di una costante additiva, da

$$F(u) = \int_0^{2\delta} g\, u(x)\, \rho \sqrt{1+u'^2(x)}\, dx ,$$

ρ = densità per unità di lunghezza

mentre l'ipotesi di inestensibilità porta al vincolo

$$\int_0^{2\delta} \sqrt{1+u'^2(x)}\, dx = 2\ell .$$

La forma del filo pesante in equilibrio è allora descritta dal pt. di minimo u dell'energia pot. $F(u)$ sotto le condizioni

$$u(0) = u(2\delta) = 0 , \quad \int_0^{2\delta} \sqrt{1+u'^2(x)}\, dx = 2\ell .$$

Affrontiamo il probl. utilizzando il parametro lunghezza d'arco s

$$x = x(s) \qquad s \in [0, 2\ell]$$
$$y = u(x(s)) \doteq u(s)$$

Allora, l'energia potenziale possiamo riscriverla (a meno della costante moltipl. ρg) nella forma

$$F(u) = \int_0^{2\ell} u(s)\, ds .$$

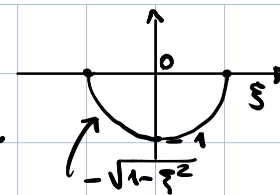
Siccome $x'^2(s) + u'^2(s) = 1 \;\; \forall s \in [0, 2\ell]$ si ha $x'(s) = \sqrt{1-u'^2(s)}$ e il vincolo sopra si trasforma nel vincolo che gli estremi del filo abbiano distanza 2δ:

Consid.

$$G(u) = \int_0^{2\ell} \sqrt{1-u'^2(s)}\, ds = 2\delta .$$

Oss. $f(x,u,\xi) = f(u) = u$ è convessa ma

$g(x,u,\xi) = -\sqrt{1-\xi^2}$ è strett. convessa in $]-1,1[$



(oss. che $x'^2(s) + u'^2(s) = 1 \Rightarrow |u'(s)| \leq 1 \ \forall s$ e se $|u'(s_1)| = 1$, il filo avrebbe un pt. angoloso, quindi non sarebbe regolare come richiesto; quindi poss. supporre $|u'(s)| < 1$).

Consid. allora il funzionale (strett.) convesso

$$\tilde{F}(u) = F(u) - \lambda\, G(u) \qquad \lambda > 0$$

Se troviamo $\lambda > 0$ e una soluzione $u \in C^2$ dell'equaz. di (EE) per $\tilde{F}$ che soddisfa $u(0) = u(2\ell) = 0$ e il vincolo isoperimetrico $G(u) = 2\delta$, questa sarà l'unica soluzione del ns. pbm. variazionale, e avremo determinato univ. la forma del filo!

(oss. $\displaystyle \delta G(u,\psi) = -\int_0^{2\ell} \frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}\,\psi'\,ds \underset{\text{integr. per parti}}{=} \int_0^{2\ell} \frac{u''}{\sqrt{1-u'^2}^{\,3}}\,\psi\,ds$

$\psi \in C^1$, $\psi(0) = \psi(2\ell) = 0$

$\delta G(u,\psi) = 0 \underset{\text{lemma fond. del C.d.V}}{\Longleftrightarrow} u''(s) = 0 \Longleftrightarrow u(s) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u \equiv 0$ altrimenti $u \in X$

$\notin X_G$, non soddisfa $G(u) \neq 2\delta$

$\Rightarrow \forall u \in X_G \cap C^2$ si ha che $\exists \psi \in C^0_0 = Z$: $\delta G(u,\psi) \neq 0$)

L'eq. di EE è

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\lambda\, u'(s)}{\sqrt{1-u'^2(s)}}\right] = 1 \qquad \text{su } [0, 2\ell].$$

Otteniamo allora

$$\frac{\lambda u'(s)}{\sqrt{1-u'^2(s)}} = s+c \qquad c\in\mathbb{R} \text{ arbitrario}$$

ossia $\qquad \lambda^2 u'^2(s) = (s+c)(1-u'^2(s))$

e quindi

$$u'(s) = \frac{s+c}{\sqrt{\lambda^2+(s+c)^2}} \qquad \text{su } [0,2\ell]$$

Possiamo fare la ragionevole ipotesi fisica che il profilo sia simmetrico rispetto al pt. di mezzo $s=\ell$ del filo, dove esso avrà altezza minima.

Dovremo avere allora $u'(\ell)=0$, e quindi $c=-\ell$.

Abbiamo allora la soluzione

$$u(s) = \int_0^s \frac{\tau-\ell}{\sqrt{\lambda^2+(\tau-\ell)^2}}\,d\tau = \sqrt{\lambda^2+(\tau-\ell)^2}\,\Big|_0^s$$

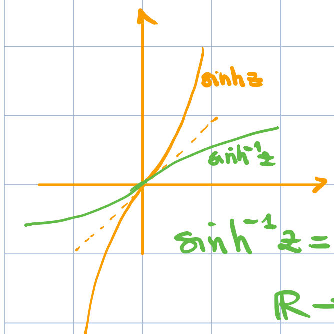
$$= \sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2} - \sqrt{\lambda^2+\ell^2}$$

$(u(0)=u(2\ell)=0)$, purché si riesca a determinare $\lambda>0$ in modo che valga $G(u)=2\delta$.

Dall'assunzione di simmetria basta provare che $\exists\lambda>0$ t.c.

$$\delta = x(\ell) = \int_0^\ell \sqrt{1-\left(\frac{s-\ell}{\sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2}}\right)^2}\,ds = \underbrace{\int_0^\ell \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2}}\,ds}_{h(\lambda)}$$

$$h(\lambda) \doteq \int_0^\ell \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2}}\,ds \underset{\frac{\ell-s}{\lambda}=z}{=} -\int_{\ell/\lambda}^0 \frac{\lambda^2}{\lambda\sqrt{1+z^2}}\,dz = \lambda\int_0^{\ell/\lambda}\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$



$$= \lambda \sinh^{-1}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right) = \frac{\sinh^{-1}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)}{1/\lambda}$$

$\sinh^{-1} z = \log\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)$

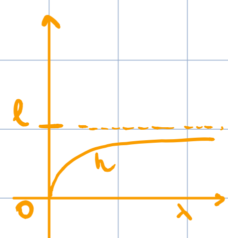
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$h(\lambda)$ è una funz. continua, positiva su $]0,+\infty[$

(*) vedi fine lez.

$\lim_{\lambda\to 0^+} h(\lambda) = 0 \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} h(\lambda) = \ell$

Si prova facilm. che $h(\lambda)$ è strett. crescente. Per il teorema dei valori intermedi $\exists\, \lambda > 0$ tale che $h(\lambda) = \delta$ $(\delta < \ell\,!!)$. Tale λ è unico poiché h strett. crescente. La dim. è quindi conclusa.



Nota che, in generale, come sopra, $\forall s \in [0, 2\ell]$, per il λ ottenuto sopra abbiamo

$$\begin{cases} x(s) = \displaystyle\int_0^s \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(\tau-\ell)^2}}\, d\tau = \delta - \lambda \sinh^{-1}\left(\frac{\ell-s}{\lambda}\right) \\ u(s) = \sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2} - \sqrt{\lambda^2+\ell^2} \end{cases}$$

forma parametrica della soluzione! Dalla prima eq. troviamo $s(x)$

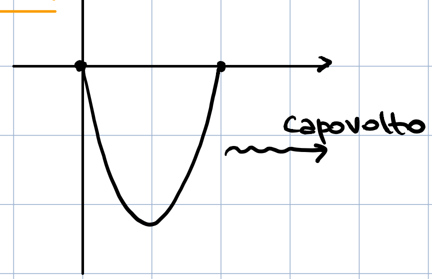
$$s(x) = \ell - \lambda \sinh\left(\frac{\delta - x}{\lambda}\right)$$

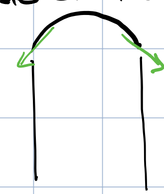
e inserendo nella seconda equazione troviamo

$$y = u(x) = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 \sinh^2\left(\frac{\delta-x}{\lambda}\right)} - \sqrt{\lambda^2+\ell^2}$$

$$= \lambda \cosh\left(\frac{\delta-x}{\lambda}\right) - \sqrt{\lambda^2+\ell^2}.$$

Comm. L'uso dell'arco catenario in architettura (vedi commenti in [materiale didattico online])





arco catenario: se fatto in muratura, presenta una distribuzione uniforme del carico e le linee di forza lungo le quali si scarica il peso restano contenute all'interno della struttura e vanno a finire sulle due basi d'appoggio

arco romano: le linee di forza spingono verso l'esterno in prossimità delle basi!

L'arco catenario è stato utilizzato nella costruzione di cupole (cupola di Saint Paul, Londra), ponti (ponte ferroviario di Garabit, Francia; ponte Santa Trinità, Firenze); archi (Gateway Arch, Saint Louis, Missouri, Casa Batllò & Sagrada Familia, Barcellona e molti altri). □

(*) pag. 103 : $h(\lambda) = \dfrac{\sinh^{-1}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)}{1/\lambda} = \dfrac{\log\left(\frac{\ell}{\lambda} + \sqrt{\frac{\ell^2}{\lambda^2}+1}\right)}{1/\lambda}$

- $\lim\limits_{\lambda\to0^+} \underbrace{h(\lambda)}_{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} = 0$ (gerarchia degli infiniti!)
- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} h(\lambda) = \lim\limits_{\substack{t\to0^+\\ \frac{\ell}{\lambda}=t}} \dfrac{\ell\log(1+t+o(t))}{t} = \ell$
- $h'(\lambda) = \sinh^{-1}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right) + \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2}}\left(-\dfrac{\ell}{\lambda^2}\right) = \sinh^{-1}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right) - \dfrac{\ell}{\sqrt{\lambda^2+\ell^2}}$

$$h''(\lambda) = \frac{-\ell}{\lambda^2\sqrt{1+\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2}} + \frac{\ell\lambda}{(\lambda^2+\ell^2)^{3/2}} = \frac{-\ell^3}{(\lambda^2+\ell^2)^{3/2}} < 0$$

quindi h' è strett. decrescente. Ora $\lim_{\lambda\to 0^+} h'(\lambda) = +\infty$, $\lim_{\lambda\to+\infty} h'(\lambda) = 0$ e quindi $h'(\lambda) > 0$ in $]0,+\infty[$. Risulta che $h(\lambda)$ è strett. crescente ■

(*) pag. 98 (teorema delle funz. implicite - teor. del Dini)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto; $g : X \to \mathbb{R}$ continua e $(x_0,y_0) \in X$.
Se g_y è continua e $g_y(x_0,y_0) \neq 0$, allora $\exists$ sono un intorno I di x_0 $(]x_0-\varepsilon_1, x_0+\varepsilon_2[)$ e un intorno J di y_0 $(]y_0-\varepsilon_2, y_0+\varepsilon_2[)$ ed un unica funzione $\varphi : I \to J$ continua e t. c.

$$\{(x,y)\in I\times J : g(x,y) = g(x_0,y_0)\} = \{(x,y)\in I\times J : y = \varphi(x)\},$$

Inoltre, se $g \in \mathcal{C}^1(X)$, allora $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ e vale (ossia $g(x,\varphi(x)) = g(x_0,y_0)$ $\forall x\in I$)

$$\varphi'(x) = -\frac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))} \quad \forall x \in I.$$