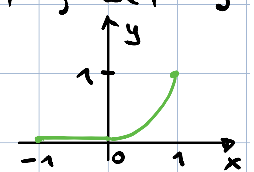
13 lez. 30/03

Eq. di Eulero-Lagrange e il lemma di Du Bois-Reymond: la sorpresa!

• Abbiamo già oss. che un estremale debole (di classe $\mathcal{C}^1$) di F non è nec. $\mathcal{C}^2$ [$F(u)=\int_{-1}^{1} u^2(2x-u')^2\,dx$ su $X=\{u\in\mathcal{C}^1([-1,1]):\ u(-1)=0,\ u(1)=1\}$

$$u_0(x)=\begin{cases}0 & \text{su } [-1,0]\\ x^2 & \text{su } [0,1]\end{cases}\ \in X$$



$\in \mathcal{C}^1([-1,1])$, $\notin \mathcal{C}^2([-1,1])$.

vedi fine lez. pag. 128

$F(u)\geq 0$, $F(u_0)=0$ u_0 (unico) pt. di minimo per F].

Nonostante questo, vedremo che sarà soddisfatta l'eq. di Eulero-Lagrange (ricord. che per passare da (EED) a (EE) abbiamo richiesto $f\in\mathcal{C}^2$, $u\in\mathcal{C}^2$ alla soluz. di (EED)), anche nella sola ipotesi di $f\in\mathcal{C}^1$ e $u\in\mathcal{C}^1$!! ma osservo subito che in questo caso l'eq. di Eulero-Lagrange deve essere interpretata bene!

Tutto questo sarà dim. mediante i due risultati qui sotto. Vedremo anche un risultato di regolarità per estremali deboli (usando l'eq. di EE che otteniamo sopra) nell'ipotesi di stretta convessità della lagrangiana f.

• Riusciamo anche a det. l'eq. di Eulero-Lagrange per estremali $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}$. Abbiamo visto nell'es. (paradosso di Eulero) che ci sono pbm. variazionali, per i quali ci si deve aspett. soluzioni che hanno pt. angolosi, e per i quali non riusciamo a trovare una soluzione in $\mathcal{C}^1$.

Lemma (di Du-Bois-Reymond): Sia $g \in \mathcal{C}^0([a,b])$ tale che

$$\int_a^b g(x)\, v'(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}^1([a,b]),\ v(a)=v(b)=0$$

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $g(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$.

Oss. Se $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$, allora il lemma sopra segue subito dal lemma fond. del CdV:

$$0 \underset{\text{ip.}}{=} \int_a^b g(x)\, v'(x)\, dx \underset{\text{integr. per parti}}{=} \cancel{g(x)v(x)\Big|_a^b} - \int_a^b g'(x)\, v(x) \quad \forall v \in Z$$

$$\underset{\text{Lemma fond.}}{\Longrightarrow} \quad g'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a,b]. \qquad \square$$

(lez. 6 pag. 42 analog. per $f(x,u,\xi) = f(x,\xi)$ vedi lez. 7 pag. 52)

not: $f'(u') = f_\xi(u')$

Oss. Se $f(x,u,\xi) = f(\xi)$ funz. Lagrangiana, $\in \mathcal{C}^1$, $\underset{\mathcal{C}^1}{u}$ sol. di (EED)

$$\Longleftrightarrow \quad \int_a^b f'(u')\, v'(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in Z;$$

quindi dal lemma di Du Bois-Reymond u sol. di (EED) $\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$: $f'(u') = c$ su $[a,b]$. $\square$

OSS. Supp. $g \in L^1_{loc}(a,b)$ t.c. $\int_a^b g(x)\, v'(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty_c(]a,b[)$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $g(x) = c$ q.o. su $]a,b[$. ([Brezis])

Dim. Sia $\phi \in \mathcal{C}^0([a,b])$ con $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Poniamo

$$w(x) = \phi(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(t)\,dt \qquad x \in [a,b] \quad \text{e}$$

$$v(x) = \int_a^x w(t)\,dt \,.$$ Allora $v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ (TFC), $v(a) = v(b) = 0$ (per come def. w)

$(v'(x) = w(x))$

Per ipotesi abbiamo

$$0 = \int_a^b g(x)\,v'(x)\,dx = \int_a^b g(x)\left[\phi(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(t)\,dt\right]dx$$

$$= \int_a^b \left[g(x)\,\phi(x) - g(x)\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(t)\,dt\right]dx$$

$$\int_a^b g(x)\,\bar{\Phi}\,dx = \bar{\Phi}\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) = \int_a^b \bar{g}\,\phi(t)\,dt$$

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(t)\,dt \qquad \bar{g} = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt\right)\phi(x)\,dx$$

cambiamo nome variabili

$$= \int_a^b \left[g(x)\,\phi(x) - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt\right)\phi(x)\right]dx$$

$$= \int_a^b \left[g(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt\right]\phi(x)\,dx$$

Poiché abbiamo quindi $\int_a^b \left[g(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt\right]\phi(x)\,dx = 0$ $\forall\, \phi \in \mathcal{C}^0([a,b]),\ \phi(a) = \phi(b) = 0$, dal lemma fond. del CdV si ha

$$g(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt \qquad \forall\, x \in [a,b].$$ ■

Corollario: Siano $g, h \in \mathcal{C}^0([a,b])$ t.c.

$$\int_a^b [g(x)v'(x) + h(x)v(x)]dx = 0 \quad \forall v \in Z.$$

Allora $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ e $g'(x) = h(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

OSS. Se $g \in \mathcal{C}^1([a,b]), h \in \mathcal{C}^0([a,b])$: $\int_a^b [g(x)v'(x) + h(x)v(x)]dx = 0$ $\forall v \in Z$, allora la tesi seguirebbe banalmente usando nuov. l'integr. per parti, oss. che $v \in Z$, e il lemma fond. del CdV. □

Dim. Poniamo $\tilde{g}(x) = \int_a^x h(t)dt$; allora $\tilde{g} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ e $\tilde{g}'(x) = h(x)$ su $[a,b]$.

Allora, $\forall v \in Z$ abbiamo

$$\int_a^b [g(x) - \tilde{g}(x)] v'(x) dx \underset{\text{per ipotesi}}{=} -\int_a^b h(x)v(x)dx - \underbrace{\int_a^b \tilde{g}(x)v'(x)dx}_{\text{integrando per parti } \tilde{g} \in \mathcal{C}^1 !! \ v \in Z}$$

$$= -\int_a^b h(x)v(x)dx + \int_a^b \tilde{g}'(x)v(x)$$

$$\underset{\tilde{g}'(x) = h(x)}{=} -\int_a^b h(x)v(x)dx + \int_a^b h(x)v(x)dx = 0$$

Dal lemma di Du-Bois-Reymond segue che $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$g(x) - \tilde{g}(x) = c \quad \forall x \in [a,b] \quad (\Rightarrow g(a) - \underbrace{\tilde{g}(a)}_{=0} = c \Rightarrow c = g(a))$$

Ne segue che $g(x) = g(a) + \int_a^x h(t)dt$, ossia la tesi. ■

Es. $\boxed{\text{Provate che un estremale debole di } \mathcal{F}(u)=\int_0^1 [u'^2-u^2]\,dx \text{ è di classe } \mathscr{C}^2([0,1]).}$

$f(x,u,\xi)=f(u,\xi)$
$f_\xi = 2\xi$
$f_u=-2u$

Infatti, $u\in\mathscr{C}^1([0,1])$ e soddisfa $\int_0^1 [u'v'-uv]\,dx=0$ $\forall v\in Z$. Dal coroll. app. scritto con $h(x)=-u\in\mathscr{C}^0([0,1])$ con $g(x)=u'(x)\in\mathscr{C}^0([a,b])$ segue $u'\in\mathscr{C}^1([0,1])$ e $u''(x)=-u(x)$ e quindi $u\in\mathscr{C}^2([0,1])$. □

Dal corollario segue immediatamente il seguente importante

Teorema: Sia $f\in\mathscr{C}^1([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e sia $\mathcal{F}(u)=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx$ $u\in\mathscr{C}^1([a,b])$.

Supp. che $u\in\mathscr{C}^1([a,b])$ sia un estremale debole di $\mathcal{F}$, cioè u soddisfa l'eq. (EED)

$$\int_a^b \left[f_\xi(x,u(x),u'(x))\,v'(x)+f_u(x,u(x),u'(x))\,v(x)\right]dx=0 \quad \forall v\in Z.$$

Allora, la funzione composta $x\longmapsto f_\xi(x,u(x),u'(x))$ è di classe $\mathscr{C}^1([a,b])$ e

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x,u(x),u'(x))\right]=f_u(x,u(x),u'(x)) \quad \text{su } [a,b]$$

cioè vale l'eq. di Eulero-Lagrange forte.

Dim. immediata dal corollario con $g(x)=f_\xi(x,u(x),u'(x))$
$h(x)=f_u(x,u(x),u'(x))$. ■

OSS. Poiché in generale né u né f sono di classe $\mathcal{C}^2$, <u>NON</u> possiamo applicare la regola di deriv. di funzione composta per derivare $f_\xi(\cdot, u, u')$.

$\left(\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x,u,u')\right] = f_{\xi x}(x,u,u') + f_{\xi u}(-)u' + f_{\xi\xi}(-)u''\right)$

In questo caso è più espressivo scrivere la cond. nec. data dall'eq. di Eulero in <u>forma integrale</u> (detta anche prima eq. di Du Bois-Reymond): $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\text{(EEI)} \qquad f_\xi(x,u(x),u'(x)) = \int_a^x f_u(t,u(t),u'(t))\,dt + c$$

$\forall x \in [a,b]$.

Il ruolo della convessità – regolarità degli estremali deboli/pt. di minimo

Supp. che $f \in \mathcal{C}^2$ e che soddisfi $f_{\xi\xi} > 0$ (in particolare, la funzione $\xi \longmapsto f(x,u,\xi)$ è strett. convessa $\forall x \in [a,b]$, $u \in \mathbb{R}$ fissati). Vogliamo vedere come questa cond. influisce sulla regolarità di un pt. di minimo u di F.

(o un estremale debole di F)

Prop. Se $f \in \mathcal{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ con $f_{\xi\xi} > 0$, allora una soluz. $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$ dell'eq. di Eulero (in forma integrale) (in particolare se u è un pt. di minimo) di F appartiene a $\mathcal{C}^2([a,b])$.

Dim. Per ipotesi $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(*) \quad f_\xi(x, u(x), u'(x)) = \int_a^x f_u(t, u(t), u'(t))\,dt + c$$

Def. la funzione $H : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$H(x, \xi) = f_\xi(x, u(x), \xi) - \int_a^x f_u(t, u(t), u'(t))\,dt - c .$$

Poichè $f \in \mathcal{C}^2$ possiamo deriv. parzialm. H e otteniamo

$$H_x(x,\xi) = f_{\xi x}(x, u(x), \xi) + f_{\xi u}(x, u(x), \xi)\, u'(x) - \\ - f_u(x, u(x), u'(x))$$

$$H_\xi(x, \xi) = f_{\xi\xi}(x, u(x), \xi).$$

Poichè entrambe le derivate parziali sono continue, si ha H è $\mathcal{C}^1$. Consid. il luogo degli zeri $\{(x,\xi) : H(x,\xi) = 0\}$.
Abbiamo da $(*)$ che $H(x, u'(x)) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$.
Inoltre da $f_{\xi\xi} > 0$ segue $H_\xi(x,\xi) > 0$.
Preso allora $x_0 \in \,]a,b[$ abbiamo

$$H(x_0, u'(x_0)) = 0$$
$$H_\xi(x_0, u'(x_0)) = f_{\xi\xi}(x_0, u(x_0), u'(x_0)) > 0$$

Per il teorema delle funz. implicite (Dini) segue che $\exists$ un intorno I di x_0, $\exists!\, \xi : I \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$\xi(x_0) = u'(x_0)$ e $\quad H(x, \xi(x)) = 0 \quad \forall x \in I$.

Questo fatto insieme a (*) ci dà $\quad u'(x) = \xi(x) \quad \forall x \in I$.

Abbiamo allora che $u'(x) \in \mathcal{C}^1$ in I.

Poiché $x_0 \in]a,b[$ è arbitrario, segue che $u(x) \in \mathcal{C}^2(]a,b[)$

Vogliamo ottenere che u è $\mathcal{C}^2$ fino al bordo.

Consideriamo l'eq. (*), che ora possiamo scrivere (senza nessun dubbio su come va inteso)

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x, u(x), u'(x))\right] = f_u(x, u(x), u'(x)) \quad \forall x \in]a,b[.$$

Svolgendo la derivata si ha allora $\forall x \in]a,b[$

$$f_{\xi x}(x, u(x), u'(x)) + f_{\xi u}(-)u' + f_{\xi\xi}(-)u'' = f_u(-),$$

da cui, essendo $f_{\xi\xi} > 0$ si ha $\forall x \in]a,b[$

$$u''(x) = \frac{f_u(-) - f_{\xi x}(-) - f_{\xi u}(-)u'}{f_{\xi\xi}(-)}$$

Allora si ha facilmente che $\dfrac{f_u - f_{\xi x} - f_{\xi u} u'}{f_{\xi\xi}} \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

Segue allora (vedi lemma sotto)

che $u'' \in \mathcal{C}^0([a,b])$ e che l'eq. sopra vale in tutto $[a,b]$;

di conseguenza abbiamo $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$. $\square$

<u>Lemma</u>: Sia $h \in \mathcal{C}^0([a,b])$ t.c. h' esiste in $]a,b[$.
Se $\exists\, \ell = \lim_{x \to a^+} h'(x)$, allora $h'(a)$ esiste e vale ℓ. Analog. per b. $\square$

Oss. Nella dim. non si usa l'ipotesi $f_{\xi\xi}(x,u,\xi) > 0$ $\forall x \in [a,b]$, $\forall u, \xi \in \mathbb{R}$, ma soltanto che lo sia $f_{\xi\xi}(x, u(x), u'(x))$ $\forall x \in [a,b]$.
Quindi la prop. sopra può essere riscritta richiedendo solo che sia soddisfatta la condizione $f_{\xi\xi}(x,u(x),u'(x))>0$ per $u(x)$ estremale debole per F.

Oss. Se $f \in \mathcal{C}^k$ con $k \geq 2$, $f_{\xi\xi} > 0$ (opp. basta anche qui la cond. discussa appena adesso nell'oss. preced.) allora una soluzione dell'eq. di Eulero integrale (in particolare se u pt. di minimo) di F appartiene a $\mathcal{C}^k$; se $f \in \mathcal{C}^\infty$, allora $u \in \mathcal{C}^\infty$.

Dim. Supp. che $u \in \mathcal{C}^2$ (prop. preced.) e possiamo esplicitare u'' (dato che $f_{\xi\xi} > 0$) come sopra

$$u'' = \frac{f_u(-) - f_{\xi x}(-) - f_{\xi u}(-)\, u'}{f_{\xi\xi}(-)}.$$

Se $f \in \mathcal{C}^3$, allora tutti i vari termini di f in quest'espress. a destra sono $\mathcal{C}^1$; allora dato che $u \in \mathcal{C}^2$, si ha $u' \in \mathcal{C}^1$ e dall'eq. si ottiene allora $u'' \in \mathcal{C}^1$, cioè $u \in \mathcal{C}^3$.
E così via!
Questo procedimento prende il nome di "bootstrap". ▥

Oss. Abbiamo discusso il pbm. di minimo per
$F(u) = \int_{-1}^{1} u^2 (2x - u')^2 \, dx$ su $X = \{ u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0,\ u(1) = 1 \}$

Abbiamo visto che $u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x^2 & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$

è pt. di minimo (unico!) e $\mathcal{C}^1$, ma $u \notin \mathcal{C}^2$!

Notiamo che $f_{\xi\xi}(x,u,\xi) = 2u^2 \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, $(u,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

ma $f_{\xi\xi}(x,u,\xi) \not> 0$ se $u = 0$. ∎

. ______ . ______ . ______ .

Estremali spezzati ($\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}$)

Vediamo di ottenere qualche cond. necessarie per funz. minimizzanti il funzionale

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,dx$$

nella classe delle funzioni ammissibili

$$X_{\text{tratti}} = \{ u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([a,b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta \}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ assegnati.

Ricordiamo che $u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([a,b])$ se $u \in \mathcal{C}^0([a,b])$ e se $\exists$ un nr. finito di pt. $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ tale che $u \in \mathcal{C}^1([x_i, x_{i+1}])$. Quindi una tale funz. u è derivabile eccetto in un nr. finito di pt. $x_1, \dots, x_n$, dove sono però almeno $u'_-(x_i) = \lim_{x \to x_i^-} u'(x)$ e $u'_+(x_i) = \lim_{x \to x_i^+} u'(x)$ finiti. Se $u'_-(x_i) \neq u'_+(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, allora x_i prende il nome di pt. angoloso di u.

Teorema (di Eulero per estremali spezzati): Sia $f \in \mathcal{C}^1([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

i) Se u_0 è una funz. minimizz. F su X_{tratti}, allora vale l'eq. di Eulero in forma integrale, i.e. $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f_\xi(x,u_0(x),u_0'(x)) = \int_a^b f_u(t,u_0(t),u_0'(t))\,dt + c \qquad \forall x \in]a,b[.$$

In particolare, la funzione $x \longmapsto f_\xi(x,u_0(x),u_0'(x))$ è ovunque continua, per cui in ogni pt. angoloso $\bar{x}$ vale

1ª cond. di Erdmann-Weierstraß: $f_\xi(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0-}'(\bar{x})) = f_\xi(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0+}'(\bar{x}))$

In tutti i pt. di continuità di u_0' vale l'eq. di Eulero-Lagrange in forma diff.

ii) Se u_0 è una funz. minimizz. F su X_{tratti}, $\exists\, c^* \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(*)\quad f(x,u_0(x),u_0'(x)) - u_0'(x) f_\xi(x,u_0(x),u_0'(x)) = \int_a^x f_x(t,u_0(t),u_0'(t))\,dt + c^* \qquad \forall x \in]a,b[$$

In particolare, la funzione

$$x \longmapsto f(x,u_0(x),u_0'(x)) - u_0'(x) f_\xi(x,u_0(x),u_0'(x))$$

è ovunque continua, per cui in ogni pt. angoloso $\bar{x}$ vale

2ª cond. di Erdmann-Weierstraß: $f(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0-}'(\bar{x})) - u_{0-}'(\bar{x}) f_\xi(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0-}'(\bar{x}))$
$= f(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0+}'(\bar{x})) - u_{0+}'(\bar{x}) f_\xi(\bar{x},u_0(\bar{x}),u_{0+}'(\bar{x}))$

NOTA: le due cond. di Erdmann–Weierstraß dimostrano che le uniche discontinuità di u_0' che sono permesse in pt. angolosi di un estremale u_0 sono quelle che preservano la continuità di entrambe le funzioni f_ξ e $f - u_0' f_\xi$.

Oss. che da (*) segue che se $f_x \equiv 0$, allora $f - u_0' f_\xi$ risulta costante!

Applicazioni:

Es. 1 (Paradosso di Galileo): $F(u) = \int_0^1 (u'^2 - 1)^2 \, dx$,

(vedi Lez. 4 pag. 26) $X_{tratti} = \{ u \in \mathcal{C}^1_{tratti}([0,1]) : u(0) = u(1) = 0 \}$.

$f(x,u,\xi) = f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$

Si ha $0 = \min_{u \in X_{tratti}} F(u) = F(u_0)$ $\qquad u_0(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$

Abbiamo visto che la funz. minimizz. F su X_{tratti} non è unica! Ogni funz. $\mathcal{C}^1_{tratti}$ a "zig-zag" con pendenza 1 o −1 soddisf. $|u'| = 1$ nei pt. angolosi e soddisf. le cond. al bordo è una funz. minimizzante F.

Vogliamo applicare le cond. necessarie otten. sopra per ottenere quanto ottenuto "intuitiv." sopra.
Una funz. minimizz. u in X_{tratti} di F deve soddisfare l'eq. di Galileo negli intervalli non contenenti pt. angolosi, nei quali entrambe le funzioni

- $$f_\xi(u') = 4u'(u'^2-1)$$
- $$f(u') - u' f_\xi(u') = (u'^2-1)^2 - 4u'^2(u'^2-1)$$
$$= (u'^2-1)(-3u'^2-1)$$

sono continue. Inoltre, essendo $f_x \equiv 0$, l'ultima funz. risulta costante in $[0,1]$.

vedi fine lez. pag. 128

Dalla prima e seconda condizione segue che u' deve essere continua tranne al più nei pt. $\bar{x}$, dove $u'^2(\bar{x}) = 1$, e questi sono gli unici possibili pt. angolosi.

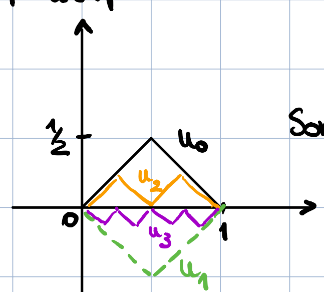
Se u ha un pt. angoloso in $[0,1]$, dalla seconda condizione (tenendo conto che allora $u'(\bar{x})=0$ e quindi $c^*=0$) si ha

$$(u'^2-1)(-3u'^2-1) \equiv 0 \quad \text{su } [0,1]$$

e quindi $\forall\, x \in [0,1]$ si ha $u'^2(x) = 1$. Quindi una funzione $u \in X_{tratti}$ minimizz. F sarà definita a tratti da

$$u(x) = \pm x + c$$

soddisferà le cond. di Erdmann-Weierstraß nei pt. angolosi (altrim. l'eq. di Eulero) e le cond. al bordo $u(0)=u(1)=0$.



Sono tutti grafici di funz. minimizzanti!

(vedi pag. 27)

pag. 115 Abb. $F(u) \geq 0$ $\quad f(x,u,\xi) = u^2(2x-\xi)^2 \quad f_\xi = -2u^2(2x-\xi)$

L'eq. di Eulero si scrive $\frac{d}{dx}\left[-2u^2(2x-u')\right] = 2u(2x-u')^2$

Se $F(u)=0$ $\left\langle \begin{array}{l} u=0 \\ u'=2x \end{array}\right.$ $\quad$ in particolare se $u \neq 0$ $\quad u'=2x \Rightarrow u''=2$ $\quad$ convessa!

- Oss. che deve essere $u(1)=1$; quindi vicino a 1 in $]a,1]$ deve essere $u>0$ e $u'(x)=2x$

  $\Rightarrow u(x)=x^2+c \quad \Rightarrow \quad u(1)=1+c=1 \quad \Rightarrow c=0$

  $\Rightarrow u(x)=x^2$ in $[0,1]$

- Se abbiamo $u(x_0)\neq 0$, allora $\exists\ ]a,b[$ con $x_0 \in\ ]a,b[$ t.c. $u(a)=u(b)=0$ $\quad u(x)\neq 0$ in $]a,b[$ $\quad a,b \in [-1,0]$.

  In $]a,b[$ $\quad u'(x)=2x \quad \Rightarrow u(x)=x^2+c$

  $\Rightarrow 0=a^2+c=b^2+c \quad \Rightarrow \quad a^2=b^2$ impossibile per $a,b \leq 0$

  $\Rightarrow u(x)=0 \quad \forall x \in [-1,0]$.

Quindi $u(x)=u_0(x)$. Risulta che u_0 è l'unico pt. di minimo di F in X. ■

pag. 127 Sia $\bar{x}$ pt. angoloso; allora $a \doteq u'_-(\bar{x}) \neq u'_+(\bar{x}) \doteq b$. Si ha

$$\begin{cases} 1^a \text{ cond. di Erdmann-Weierstraß: } & 4a(a^2-1) = 4b(b^2-1) \\ 2^a \text{ cond. di Erdmann-Weierstraß: } & (a^2-1)(-3a^2-1) = (b^2-1)(-3b^2-1) \end{cases}$$

ossia $\begin{cases} (a-b)(a^2+ab+b^2-1)=0 \\ (a^2-b^2)(3a^2+3b^2-2)=0 \end{cases} \underset{(a\neq b)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a^2+ab+b^2-1=0 \\ (a^2-b^2)(3a^2+3b^2-2)=0 \end{cases}$

Se $a^2-b^2=0$, ossia $a=-b$ ($a=b$ escluso) dalla 1^a eq. risulta $\boxed{\begin{array}{l} a=1,\ b=-1 \\ a=-1,\ b=1 \end{array}}$ $\quad (u'(\bar{x}))^2=1$

Se $a^2-b^2\neq 0$, dal sistema risulta $a=b=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad a=b=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ e quindi da scartare.