Vogliamo usare il lemma di Jacobi per provare che $\exists\, \lambda > 0$ tale che $Q(v) \geq \lambda \int_a^b (v^2 + v'^2)\, dx \quad \forall v \in Z$, che poi ci garantisce (grazie alla proposizione "base") che u_0 è un pt. di min. debole stretto per F in X.
(Prop. ii) pag. 141)

Teorema 1: Siano $f \in \mathcal{C}^3([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $u_0 \in \mathcal{C}^1([a,b])$ un estremale di F in X, $a(x) = \frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) > 0$ su $[a,b]$. Se $\exists$ un campo di Jacobi $v_0 \in \mathcal{C}^2([a,b])$ con $v_0(x) > 0$ su $[a,b]$, allora u_0 è un pt. di minimo relativo debole di F in X.

Dim. Sia $v \in Z$ fissata arbitraria. Basta provare che $\exists\, \lambda > 0$ t.c. (indip. da v)

$$\underbrace{\delta^2 F(u_0, v)}_{2Q(v)} \geq \lambda \int_a^b [v^2 + v'^2]\, dx .$$

Poniamo $\psi \doteq \frac{v}{v_0} \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $\psi(a) = \psi(b) = 0$. Dal lemma di Jacobi si ha

$$Q(v) = \int_a^b a(x)\, v_0^2 (\psi')^2 dx \geq \inf_{[a,b]} [a(x)\, v_0^2] \int_a^b \psi'^2 dx$$

$$\underset{\substack{\text{disug. di Poincaré} \\ \text{(Lez. 8)}}}{\geq} \inf_{[a,b]} [a(x)\, v_0^2]\, \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \psi^2 dx \qquad \psi = \frac{v}{v_0}$$

$$\geq \inf_{[a,b]} [a(x)\, v_0^2]\, \inf_{[a,b]} \left(\frac{1}{v_0^2}\right) \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b v^2 dx$$

$\Rightarrow \exists\, \mu > 0$ tale che

(✱) $$Q(v) \geq \mu \int_a^b v^2(x)\, dx .$$

Per concludere dobbiamo stimare $Q(v)$ dal basso anche con $\int_a^b v'^2 dx$.

Abbiamo

$$Q(v) = \int_a^b \left[a(x) v'^2 + 2b(x)\, v v' + c(x)\, v^2\right] dx$$

Poniamo

$$0 < \alpha \doteq \inf_{[a,b]} a(x) \qquad \beta \doteq \sup_{[a,b]} |b(x)| \qquad \gamma \doteq \sup_{[a,b]} |c(x)| \;;$$

otteniamo

$$\alpha \int_a^b v'^2 dx \leq Q(v) + 2\beta \int_a^b |v v'| dx + \gamma \int_a^b v^2 dx$$

$$2\left|\frac{\beta v}{\sqrt{\varepsilon}}\, v' \sqrt{\varepsilon}\right| \leq \varepsilon v'^2 + \frac{\beta^2}{\varepsilon} v^2 \qquad (\varepsilon > 0) \qquad 2|ab| \leq a^2 + b^2$$

$$\leq Q(v) + \varepsilon \int_a^b v'^2 dx + \left(\frac{\beta^2}{\varepsilon} + \gamma\right) \int_a^b v^2 dx$$

Scegliendo $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$

otteniamo

$$\frac{\alpha}{2} \int_a^b v'^2 dx \leq Q(v) + \left(\frac{2\beta^2}{\alpha} + \gamma\right) \int_a^b v^2 dx$$

$$\overset{(*)}{\leq} Q(v) + \frac{1}{\mu}\left(\frac{2\beta^2}{\alpha} + \gamma\right) Q(v)$$

$$= \left[1 + \underbrace{\frac{1}{\mu}\left(\frac{2\beta^2}{\alpha} + \gamma\right)}\right] Q(v)$$

Segue che $\exists\, \tilde{\mu} > 0$ t.c.

(**) $$Q(v) \geq \tilde{\mu} \int_a^b v'^2(x) dx .$$

Da (*) e (**) segue che $\exists \lambda > 0$ t.c.

$$\delta^2 F(u_0, v) = 2Q(v) \geq \lambda \int_a^b (v'^2 + v^2)\, dx ,$$

dove λ non dip. da $v \in Z$ fissato arbitrariam.; quindi la stima è valida $\forall v \in Z$. ■

<u>Ricapitolando</u>, la cond. di Legendre $f_{qq}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geq 0$ su $[a,b]$ è cond. nec. affinché un estremale $u_0 \in X$ sia un pt. di min. rel. debole per F. Nel teor. prec. abbiamo individuato una condizione (cioè Jesistenza di un campo di Jacobi positivo su $[a,b]$) che insieme alla cond. di Legendre stretta, cioè $f_{qq}(x, u_0(x), u_0'(x)) > 0$ su $[a,b]$, risulta suff. per avere un pt. di min. relativo deb. di F in X. □

<u>Rimane da trovare una cond. sufficiente per l'Jesistenza di un campo di Jacobi positivo su $[a,b]$</u>.

PUNTI CONIUGATI (campi di Jacobi)

Vogliamo riportare brevem. alcuni considerazioni e risultati riguard. i campi di Jacobi e i pt. coniugati. Esse daranno cond. nec. e cond. suff. affinché u_0 sia un pt. di minimo relativo debole per F in X.

Consid. l'eq. di Jacobi

u_0 estremale di F
$f \in C^3$ fissati
su $[a,b]$

$$-(a(x)v')' + (c(x) - b'(x))v = 0$$

Se $a(x) = \frac{1}{2} f_{qq}(x, u_0, u_0') > 0$ su $[a,b]$, allora tale eq. si riduce ad un'eq. diff. lineare omog. del 2° ordine: infatti si ha

$$-a'(x)\,v' - a(x)\,v'' + (c(x)-b'(x))\,v = 0 \quad \text{su } [a,b]$$

$$v'' + \underbrace{\frac{a'(x)}{a(x)}}_{\doteq p(x)}\,v' + \underbrace{\frac{b'(x)-c(x)}{a(x)}}_{\doteq q(x)}\,v = 0 \quad \text{su } [a,b]$$

e si ha

$$\boxed{v'' + p\,v' + q\,v = 0 \quad \text{su } [a,b]}$$

p, q sono funz. limitate su $[a,b]$ per la regolarità di f e u_0

Def. Un pt. $\xi \in \,]a,b]$ si dice coniugato ad a (relativo all'estremale u_0) se esiste una soluzione non-banale v dell'eq. accessoria di Jacobi che soddisfa $v(a) = v(\xi) = 0$.

OSS. 1 : Vediamo che nella ricerca dei pt. coniugati un qualsiasi campo di Jacobi non-banale che si annulla in a può essere usato. Infatti, ogni altra tale funzione v genera gli stessi pt. coniugati (se ci sono).

Vediamo questo fatto : consid. due tali funzioni v_1 e v_2.

Affermiamo che $v_1'(a) \neq 0$ (infatti, l'unica soluzione dell'eq. di Jacobi con $v(a)=0$ $v'(a)=0$ è quella identic. 0).

Analog. $v_2'(a) \neq 0$. Quindi $\exists$ 2 costanti $\neq 0$ c, d t.c

$$c\,v_1'(a) + d\,v_2'(a) = 0 .$$

Ma allora $v \doteq c\,v_1 + d\,v_2$ è una soluz. dell'eq. di Jacobi con $v(a) = v'(a) = 0$; quindi $v \equiv 0$; quindi v_2 è un multiplo non-nullo di v_1. Quindi v_1 e v_2 hanno gli stessi zeri, e quindi determinano gli stessi pt. coniugati ∎

OSS 2. Una soluzione non-banale v dell'eq. di Jacobi che si annulla in a ha un primo zero $\xi > a$, se ce ne ha uno. Infatti, per l'unicità della soluz. del probl. di Cauchy associato all'eq. di Jacobi, deve essere $v'(a) \neq 0$, e quindi $v'(a) \underset{(<)}{>} 0$; quindi $\exists\, \xi > a$ t.c. eventualm. $v(\xi)=0$. Quindi ha senso parlare del più vicino pt. coniugato ξ (se c'è), che si trova a distanza strett. positiva a destra di a. ■

Teorema 2. (Jacobi 1838). Sia $f \in \mathcal{C}^3([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, sia $u_0 \in \mathcal{C}^3([a,b])$ un estremale di $F(u) = \int_a^b f(x,u,u')\,dx$ in X (solito spazio delle fnz. ammissibili) soddisfacente $a(x) = \frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x,u_0,u_0') > 0$ su $[a,b]$. Allora

a) (Condizione nec.) Se u_0 è un pt. di min. relativo debole per F in X allora $\nexists$ sono pt. coniugati ad a nell'intervallo $]a,b[$.

b) (Condizione suff.) Viceversa, se $\nexists$ sono pt. coniugati ad a nell'intervallo $]a,b]$, allora u_0 è un pt. di min. relativo debole stretto per F in X.

NOTA ① Se $\exists$ un pt. coniugato ad a nell'intervallo $]a,b[$, allora u_0 non è pt. di min. loc. deb. (dalla cond. nec.) per F in X

② Se a è coniugato a b, non si può dire nulla a priori. Vediamo con 2 esempi questo fatto; nel primo esempio stud. su $[0,\pi]$ vedremo che π è coniugato a 0

vedi Es. 2 pag. 175

ma u_0 preso in consid. risulta un pt. di min. relativo debole per F in X; nel secondo esempio stud. su $[0,\pi]$ vedremo che π è coniugato a 0 ma u_0 non è pt. di min. relativo debole per F in X.

vedi Es.3 pag. ~~178~~

<u>Dim. b)</u> Supp. che $a(x)>0$; supp. che $\nexists$ sono pt. coniugati ad a nell'intervallo $]a,b]$. Proviamo che l'eq. di Jacobi

$$v''+pv'+qv=0 \quad \text{su } [a,b]$$

ammette una soluzione su $[a,b]$ che non si annulla mai.
Consideriamo la soluzione $\bar{v}$ su $[a,b]$ del seg. prom. di Cauchy:

$$\begin{cases} v''+pv'+qv=0 & \text{su } [a,b] \\ v(a)=0 \\ v'(a)=1 \end{cases}$$

$\bar{v}$ esiste su $[a,b]$ per la linearità dell'eq. di Jacobi e la limitatezza delle funzioni $p(x)$ e $q(x)$. $\bar{v}$ si chiama <u>la funzione di Jacobi.</u> Poichè per ipotesi <u>non</u> esiste pt. coniugato ad a in $]a,b]$, segue che $\bar{v}$ non si annulla su $]a,b]$ (vedi oss. 1).
Poichè $\bar{v}'$ è continua, $\exists\, \varepsilon>0$ e $d\in\,]a,b]$:

$$\bar{v}'(x)>\varepsilon \qquad \forall x\in[a,d]$$
$$\bar{v}(x)>\varepsilon \qquad \forall x\in[d,b].$$

Consideriamo ora v_η la soluzione dell'eq. di Jacobi su $[a,b]$ con dati iniziali $v(a)=\eta$, $v'(a)=1$ con $\eta>0$ piccolo.

Per il teorema della dipendenza continua dai dati iniziali delle soluzioni delle eq. diff. (si deve trasf. l'eq. diff del 2° ordine in un sist. di eq. diff. del 1° ordine come usualmente! Importante $a(x)>0$!!) si ha che, per η suff. piccolo,

$$|v_\eta'(x) - \bar{v}'(x)| < \varepsilon/2 \qquad |v_\eta(x) - \bar{v}(x)| < \varepsilon/2 \qquad \forall x \in [a,b]$$

Rimane da verificare che tale funzione v_η non si annulla mai su $[a,b]$: basta oss. che $v_\eta(x)$ non si annulla su $[a,d]$, poichè $v_\eta(a) = \eta > 0$ e $v_\eta'(x) > \bar{v}'(x) - \varepsilon/2 > \varepsilon/2$ su $[a,d]$.
Non si annulla su $[d,b]$ perchè $v_\eta(x) > \bar{v}(x) - \varepsilon/2$ su $[a,b]$ e $\bar{v}(x) > \varepsilon$ su $[d,b]$ e quindi $v_\eta(x) > \varepsilon/2$ su $[d,b]$.
Ora, basta prendere quindi $v_0(x) \doteq v_\eta(x)$ su $[a,b]$ e abbiamo la soluzione dell'eq. di Jacobi che non si annulla mai su $[a,b]$. ■

Es. 1 $F(u) = \int_0^1 u'^3 \, dx \qquad X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0)=0, u(1)=1\}$

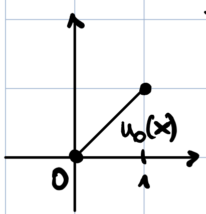
a) Provare che $u_0(x) = x$ su $[0,1]$
- i) è un estremale di F in X
- ii) soddisfa la cond. nec. di Legendre per minimizz. rel. deb
- iii) " la cond. di Legendre stretta
- iv) non soddisfa la cond. nec. di Weierstraß per pt. di min. rel. forti.

b) Discutere, usando la teoria di Jacobi (pt. coniugati), se $u_0(x) = x$ su $[0,1]$ è un pt. di min. relativo debole di F su X.

c) Provare che $u_0(x)=x$ <u>non</u> è <u>un pt. di min. rel. forte di F</u> in X (usando la definiz.).

<u>Svolg.</u> a) i) $f(x,u,\xi)=f(\xi)=\xi^3$; gli estremali sono tutti e soli rette!

$f_\xi(\xi)=3\xi^2$ (non ha tratti cost)



$u_0(x)=x$ è l'unico estremale (ammissibile), cioè in X

ii) $f_{\xi\xi}(\xi)=6\xi \qquad f_{\xi\xi}(u_0'(x))=f_{\xi\xi}(1)=6>0$!

iii) $f_{\xi\xi}(u_0'(x))=6>0$!

iv) In questo caso

$$\mathcal{E}(x,u,\xi,\eta)=f(\eta)-f(\xi)-f_\xi(\xi)(\eta-\xi) \ ;$$

quindi

$$\mathcal{E}(x,u_0(x),u_0'(x),\eta)=\mathcal{E}(x,u_0(x),1,\eta)=$$
$$=\eta^3-1-3(\eta-1)=\eta^3-3\eta+2$$
$$=(\eta-1)^2(\eta+2)$$

$\Rightarrow \mathcal{E}(x,u_0(x),u_0'(x),\eta)\geq 0$ solo se $\eta\geq -2$!! □

b) Oss. che $Q(v)\underset{\substack{\uparrow \\ b(x)=0 \\ c(x)=0}}{=}\int_0^1 a(x)v'^2\,dx=\int_0^1 3v'^2\,dx \quad \forall v\in Z$!!

L'eq. di Jacobi risulta quindi $v''=0 \qquad q(x,v,\eta)=3\eta^2, \quad \frac{d}{dx}[q_\eta(\cdot)]=0$

La funzione di Jacobi è la soluzione del prob. di Cauchy

$$\begin{cases} v'' = 0 & \text{su } [0,1] \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases} \rightsquigarrow v(x) = c_1 x + c_2$$

$\rightsquigarrow v_0(x) = x$ è la funzione di Jacobi $\in \mathcal{C}^2([\overset{a}{\overset{\shortparallel}{0}},\overset{b}{\overset{\shortparallel}{1}}])$;

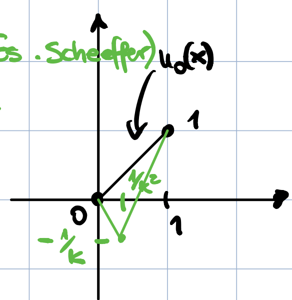
$\nexists$ sono pt. coniugati a $\underset{\underset{a}{\shortparallel}}{0}$ in $]0,1]$.

$\Rightarrow u_0(x) = x$ è un pt. di min. relativo debole stretto per F in X. $\square$

c) Oss. che $F(u_0) = \int_0^1 u_0'(x)^3\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$.

Vediamo che $u_0(x) = x$ non è pt. di min. relativo forte!

(vedi Es. Schaeffer)
analog.
Lez. 15
Es. 2



$$u_k(x) = \begin{cases} -kx & \text{su } [0, 1/k^2] \\ \dfrac{1+\frac{1}{k}}{1-1/k^2}(x-1)+1 & \text{su } \left[\frac{1}{k^2}, 1\right] \end{cases} \qquad k \geq 2$$

$u_k \notin \mathcal{C}^1([0,1])$, ma basta "smussarla" nel pt. angoloso $\left(\frac{1}{k^2}, -\frac{1}{k}\right)$ e si ha che tutto torna!

Oss. che

$$u_k \longrightarrow u_0 \quad \text{in norma } \mathcal{C}^0 \text{ su } [0,1] \;!$$

$$F(u_k) = \int_0^1 (u_k')^3\,dx = \underbrace{\int_0^{1/k^2} (-k)^3\,dx}_{\downarrow \text{ se } k \to +\infty \atop -\infty} + \underbrace{\int_{1/k^2}^1 \left(\frac{k^2+k}{k^2-1}\right)^3 dx}_{\text{limitato!}}$$

A parte il pbm. dello "smussare" ottengo

$$\tilde{u}_k \longrightarrow u_0 \text{ in norma } \mathcal{C}^0 \text{ su } [0,1]$$

$\tilde{u}_k \in X$

$$F(\tilde{u}_k) \longrightarrow -\infty \qquad k \to +\infty$$

e qualunque intorno in norma $\mathcal{C}^0$ si prende di $u_0(x)=x$ si ha, per k suff. grande, che $\tilde{u}_k \in$ a questo intorno e $F(\tilde{u}_k) < 0$, mentre $F(u_0) = 1$. !! ■

Es. 2. $F(u) = \int_0^b (u'^2 - u^2)\,dx$; vogliamo studiare, al variare di $b>0$, il pbm. di minimo $\inf_{u \in X} F(u)$,

$X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = u(b) = 0\}$

$[a,b] = [0,b]$

a) Provare che $u_0(x) \equiv 0$ su $[0,b]$

i) è un estremale di F in X;

ii) soddisfa la cond. nec. di Legendre per minimizz. rel. deboli;

iii) soddisfa la cond. di Legendre stretta;

iv) soddisfa la cond. nec. di Weierstrass per minimità rel. forti.

b) Discutere, usando la teoria dei pt. coniugati di Jacobi, se $u_0 \equiv 0$ su $[0,b]$ è un pt. di min. relativo debole di F in X.

la lunghezza dell'intervallo $[0,b]$ gioca un ruolo chiave !!

(vedi in fondo a pag. 177)

Svolg. a)

i) Abb. $f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = \xi^2 - u^2$

$$f_\xi(u,\xi) = 2\xi \qquad f_u(u,\xi) = -2u$$
$$f_{\xi\xi}(u,\xi) = 2 \qquad f_{uu}(u,\xi) = -2$$

L'eq. di EE. è data da
$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(u,u')\right] = f_u(u,u') \quad ;$$
quindi
$$u'' + u = 0 \quad \text{su } [0,b]$$
e $u_0(x) \equiv 0$ è una soluzione di tale eq., e quindi un estremale di F in X.

ovviamente soddisfa i dati al bordo!

ii) $f_{\xi\xi}(x,u_0(x),u_0'(x)) = 2 \geq 0 \quad \forall x \in [0,b]$

iii) $\phantom{f_{\xi\xi}(x,u_0(x),u_0'(x)) = 2} > 0 \quad$ "

iv) $\mathcal{E}(x,u,\xi,\eta) = f(x,u,\eta) - f(x,u,\xi) - f_\xi(x,u,\xi)(\eta-\xi)$

e quindi
$$\mathcal{E}(x,u_0(x),u_0'(x),\eta) = \mathcal{E}(x,0,0,\eta) = \eta^2 \geq 0 \quad \forall x\in[0,b] \ \forall \eta\in\mathbb{R} \quad \square$$

b) Essendo f quadratica in u e ξ, si ha che la lagrangiana accessoria è

$a(x) = \frac{1}{2} f_{\xi\xi}(u_0') = 1$
$b(x) = \frac{1}{2} f_{\xi u}(u_0') = 0$
$c(x) = \frac{1}{2} f_{uu}(u_0') = -1$
$\Rightarrow q(x,v,\eta) = a(x)\eta^2 + 2b(x)v\eta + c(x)v^2 = \eta^2 - v^2$

$$q(x,v,\eta) = \eta^2 - v^2$$
e
$$Q(v) = \int_0^b \left[v'^2 - v^2\right] dx \qquad (= F(v))$$

L'eq. di Jacobi è dunque ancora $v'' + v = 0$ su $[0,b]$.

Consid. la funzione di Jacobi relativa, cioè la soluz. del prob. di Cauchy

$$\begin{cases} v'' + v = 0 & \text{su } [0,b] \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $v(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

(integrale generale dell'eq. diff. al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

La funzione di Jacobi è dunque $v(x) = \sin x$.

Oss. che il primo pt. coniugato ad $a=0$ è $\xi = \pi$.

(cioè il primo pt. a destra di $a=0$ in cui si annulla v)

Allora, l'estremale $u_0 \equiv 0$ su $[0,b]$ non ha pt. coniugato ad $a=0$ in $[0,b]$ se $b < \xi$, mentre per $b \geq \pi$ esiste un pt. coniugato ξ.

Dal teorema 2 segue allora che:

- $u_0(x) \equiv 0$ è un pt. di min. relativo debole stretto di F su $[0,b]$ se $b < \pi$;
- $u_0(x) \equiv 0$ non è un pt. di min. relativo debole di F su $[0,b]$ se $b > \pi$

  (infatti $a=0$ e $b=\pi$ sono una coppia di pt. coniugati in $[0,b]$ e $\xi \in]0,b[$)

  OSS. pag. 179
- Il caso $u_0(x) \equiv 0$ su $[0,\pi]$ non lo possiamo dedurre dal teorema 2. Ma questo l'abbiamo già trattato (Poincaré-Wirtinger; Lez. 8) provando che $u_0(x) \equiv 0$ (così come $u_0(x) = c \sin x$, $c \in \mathbb{R}$) è un pt. di min. assoluto di F in $[0,\pi]$. ∎

Es 3. Sia $F(u) = \int_0^\pi [u'^2 - u^2 - u^4]\,dx$ $\quad X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0) = u(\pi) = 0\}$

Verificate

i) $u_0(x) \equiv 0$ è un estremale per F;

ii) soddisfa la cond. di Legendre stretta;

iii) $b = \pi$ è pt. coniugato a 0;

iv) $u_0(x) \equiv 0$ NON è un pt. di mini. loc. debole per F in X

$u_k = \frac{1}{k}\sin x$ su $[0,\pi]$ $\in X$

$F(u_k) < 0 = F(u_0)$

$u_k \to u_0$ in norma $\mathcal{C}^1$!

□

Svolg. i) Abbiamo $f(x,u,\xi) = \xi^2 - u^2 - u^4$. Quindi $\frac{d}{dx}[f_\xi(u,u')] = f_u(u,u')$ diventa $u'' = -u - 2u^3$ su $[0,\pi]$,

e ovviamente è soddisfatta da $u_0 \equiv 0$ su $[0,\pi]$.

ii) $f_{\xi\xi}(x,u,\xi) = 2$ $\forall x \in [0,\pi]$, $\forall u, \xi \in \mathbb{R}$; quindi

$$f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) = 2 > 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$$

iii) Abbiamo $a(x) = \frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) = 1$

$b(x) = \frac{1}{2} f_{\xi u}(\quad " \quad) = 0$

$c(x) = \frac{1}{2} f_{uu}(\quad " \quad) = \frac{1}{2}(-2) = -1$

e quindi l'eq. (accessoria) di Jacobi risulta

$$v'' + v = 0 \quad \text{su } [0,\pi]$$

sol. di $v'' + v = 0$ su $[0,\pi]$, $v(0) = 0$, $v'(0) = 1$

La funzione di Jacobi risulta quindi $v(x) = \sin x$

e quindi π è pt. coniugato a 0.

iv) Come suggerito, consid. $u_k(x) = \frac{1}{k}\sin x$ su $[0,\pi]$

Allora $u_k \in X$; inoltre $u_k \longrightarrow u_0$ in norma $\mathscr{C}^1$
e si ha $\forall k \geq 1$

$$F(u_k) = \int_0^\pi \left[\frac{1}{k^2}\cos^2 x - \frac{1}{k^2}\sin^2 x - \frac{1}{k^4}\sin^4 x\right]dx$$

$$= \frac{1}{k^2}\int_0^\pi \cos 2x\,dx - \frac{1}{k^4}\int_0^\pi \sin^4 x\,dx$$

$$= \cancel{\frac{1}{k^2}\left.\frac{\sin 2x}{2}\right|_0^\pi} - \frac{1}{k^4}\int_0^\pi \sin^4 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{k^4}\int_0^\pi \sin^4 x\,dx < 0 = F(u_0)$$

■

pag. 177 "Piccola osservazione":

Si può verificare facilmente, anche senza l'uso della teoria dei pt. coniugati di Jacobi, che $u_0 \equiv 0$ su $[0,b]$ con $b > \pi$ non è un pt. di minimo relativo debole di F su X. Basta considerare $u_k(x) = \frac{1}{k}\sin\left(\frac{\pi}{b}x\right)$, $k \geq 1$ $\in X$, $u_k \longrightarrow 0$ in $\mathscr{C}^1([0,b])$ e

$$F(u_k) = \int_0^b \left[u_k'^2 - u_k^2\right]dx = \frac{1}{2bk^2}\left[\pi^2 - b^2\right] < 0 = F(u_0).$$

■