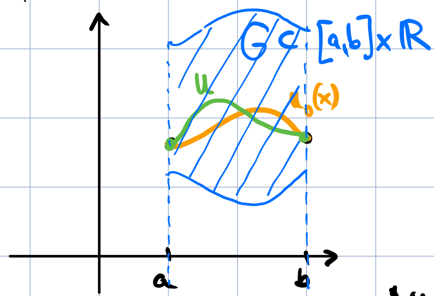
Dim. (Corollario 1). Sia $u \in X$ t.c. $\|u-u_0\|_{C^0} < \delta'$ con $\delta' < \delta$,



tale che

$\{(x,z) : |z-u_0(x)| < \delta'\} \subseteq G$ e

$|P(x,z) - P(x,u_0(x))| < \delta$ se $|z-u_0(x)| < \delta'$ $\forall x \in [a,b]$

Allora ovviamente si ha $(x,u(x)) \in G$

e

$$|P(x,u(x)) - u_0'(x)| = |P(x,u(x)) - P(x,u_0(x))| < \delta$$

e quindi, per l'ipotesi (*)' su $\mathcal{E}$ (ponendo $z = u(x)$, $\xi = P(x,u(x))$ e $y = u'(x)$) si ha

$$\mathcal{E}(x, u(x), P(x,u(x)), u'(x)) \geq 0.$$

Allora, per il Teorema 1 possiamo concludere che

$$F(u) \geq F(u_0).$$

Per l'arbitrarietà di $u \in X$ t.c. $\|u-u_0\|_{C^0} < \delta'$ con $\delta' < \delta$ possiamo concludere che u_0 è un pt. di minimo relativo forte di F in X. $\square$

OSS. 1 Otteniamo lo stesso risultato con una cond. legg. modificata rifacendo la stessa dim. di sopra:

(**)' $\exists \delta > 0$ t.c. $\mathcal{E}(x,z,P(x,z),y) \geq 0$ $\forall x \in [a,b], \forall y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$ t.c. $|z-u_0(x)| < \delta$.

(e un pt. di minimo relativo forte stretto se abbiamo la disug. $>$ $\forall y \neq P(x,z)$)

NOTA: • La positività $\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) \geq 0 \ \forall x \in [a,b], \forall \eta \in \mathbb{R}$ è cond. nec. per un estremale $u_0 \in X$ affinché sia pt. di min. rel. forte...

•• Se $u_0 \in X$ è un estremale immerso in un campo, allora la positività $\mathcal{E}(x, z, P(x,z), \eta) \geq 0 \ \forall x \in [a,b], \forall \eta \in \mathbb{R}$, e "$z$ vicino a $u_0(x)$", cioè t.c. $|z - u_0(x)| < \delta$ $\delta > 0$ opport. risulta cond. suff. ∎

Def. Nelle ipotesi sopra, se il campo di estremali h su G con pendenza P soddisfa

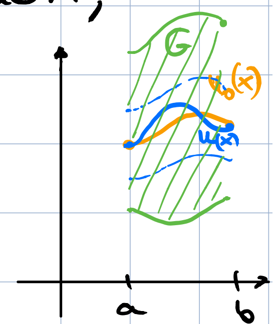
$$\mathcal{E}(x, z, P(x,z), \eta) \geq 0 \quad \forall (x,z) \in G, \ \forall \eta \in \mathbb{R}$$
$$\text{e} \quad > 0 \quad \forall \eta \neq P(x,z)$$

allora esso si chiama campo di Weierstrass. .

OSS. 2 Se $u_0 \in C^2([a,b])$ è un estremale immerso in un campo di Weierstrass h, $u_0 \in X$ e $G = [a,b] \times \mathbb{R}$, allora u_0 è un pt. di minimo assoluto (stretto) per F in X.

Nel prossimo corollario diamo cond. suff. (più semplici da verificare) che ci garantiscono via il teorema 1 che un estremale u_0 immerso in un campo sia pt. di min. relativo forte.

Corollario 2. Sia $f\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, sia h un campo di estremali in G con pendenza P. Sia $u_0\in X$ un estremale immerso nel campo tale che $\exists\, \delta_1>0 : \forall u\in X$, $\|u-u_0\|_{C^0}<\delta_1 \Rightarrow \operatorname{graf} u\subset G$.



Allora

a) Se $f_{\xi\xi}(x,u_0(x),u_0'(x))>0 \quad \forall x\in[a,b]$, allora u_0 è un pt. di minimo relativo debole (stretto) per F in X;

b) Se $\exists\, 0<\delta<\delta_1$ t.c. $\forall u\in X$ $\left[\|u-u_0\|_{C^0}<\delta \Rightarrow \left(\forall \xi\in\mathbb{R} \ \ f_{\xi\xi}(x,u(x),\xi)>0\right)\right]$ allora u_0 è un pt. di minimo relativo forte (stretto) per F in X.

Dim. (traccia) Usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange, ricordando la def. di $\mathcal{E}$, si ha che $\exists\, 0<\vartheta(x)<1$ t.c.

$$\mathcal{E}(x,u(x),P(x,u(x)),u'(x)) = \frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x,u(x),\Psi_\vartheta(x))\left(u'(x)-P(x,u(x))\right)^2$$

dove $\Psi_\vartheta(x) = P(x,u(x)) + \vartheta(x)\left(u'(x)-P(x,u(x))\right)$

a) Dalla continuità delle funzioni coinvolte e dalla cond. di Legendre stretta segue che $\exists\, 0<\delta<\delta_1$ t.c. $\forall u\in X$, $\|u-u_0\|_{C^1}<\delta$ si ha $\mathcal{E}(x,u(x),P(x,u(x)),u'(x))>0 \quad \forall x\in[a,b]$ e quindi dal teorema 1 segue la tesi. $\square$

b) Come in a) usando che $\|u-u_0\|_{\mathcal{C}^0}<\delta$ .... $\blacksquare$

OSS. 3 Se $f\in\mathcal{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ soddisfa $f_{\xi\xi}(x,z,\xi)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$, $\forall z,\xi\in\mathbb{R}$, allora nelle ipotesi del teorema 1 si conclude che un estremale $u_0\in X$ immerso nel campo è un pt. di minimo (unico se $f_{\xi\xi}>0$) del funzionale F tra tutte le funz. $\mathcal{C}^1$ con i suoi stessi dati al bordo il cui grafico è contenuto in G. In particolare, se $G=[a,b]\times\mathbb{R}$, allora u_0 è pt. di minimo assoluto del funzionale F in X (unico se $f_{\xi\xi}>0$). $\blacksquare$

Rimane da rispondere alla seg. domanda: Quand'è che un dato estremale u_0 può essere immerso in un campo di estremali?

Teorema 2: Sia $f\in\mathcal{C}^3([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$; sia $u_0\in\mathcal{C}^2([a,b])$ un estremale di F che soddisfa

i) la condizione di Legendre stretta su $[a,b]$

ii) che l'intervallo $[a,b]$ non contiene coppie di pt. coniugati relativi all'estremale u_0, allora u_0 può essere immerso in un campo (di classe $\mathcal{C}^2$) di estremali dati da $z=u(x,\alpha)$, $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$ $x\in[a,b]$.

Concludiamo con la "principale cond. suff." affinchè un estremale sia un pt. di min. relativo forte per F, con $f\in\mathcal{C}^3$.

<u>Teorema 3</u>: Sia $f\in\mathcal{C}^3([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, sia $u_0\in\mathcal{C}^2([a,b])$, $u_0\in X$ un estremale di F tale che

i) esiste un intorno aperto $\mathcal{U}$ del grafico di u_0 in $[a,b]\times\mathbb{R}$ tale che valga
$$f_{\xi\xi}(x,z,\xi)>0 \qquad \forall (x,z,\xi)\in\mathcal{U}\times\mathbb{R}$$

ii) l'intervallo $[a,b]$ non contiene coppie di pt. coniugati relativi all'estremale u_0.

Allora u_0 è un pt. di minimo relativo forte (stretto) per F in X.

(vedi anche OSS. 3 fatta sopra).

Concludiamo con gli esercizi.

Es. 1 Consid. $F(u)=\int_0^1 u\,u'^2\,dx$ su $X=\{u\in C^1([0,1]) : u(0)=u(1)=1\}$

i) Verificate che $u_0\equiv 1$ è un estremale di F in X.

ii) Usando la teoria dei campi di estremali e pendenza, verificate che u_0 è un pt. di min. relativo forte di F in X.

iii) Oss. che F non ammette pt. di min. assoluto in X $\left(\inf_X F=-\infty\right)$.

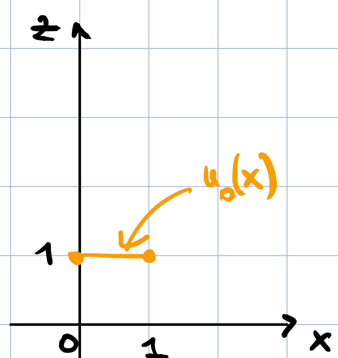
i) $f(x,u,\xi)=f(u,\xi)=u\xi^2$ la lagrangiana

$f_\xi=2u\xi \qquad f_{\xi\xi}=2u$

$f_u=\xi^2$

L'eq. di (EE) è $\frac{d}{dx}\left[2u\,u'\right]=u'^2$ su $[0,1]$.

Ovviamente $u_0\equiv 1$ risolve l'eq.; inoltre $u_0\in X$ $\square$

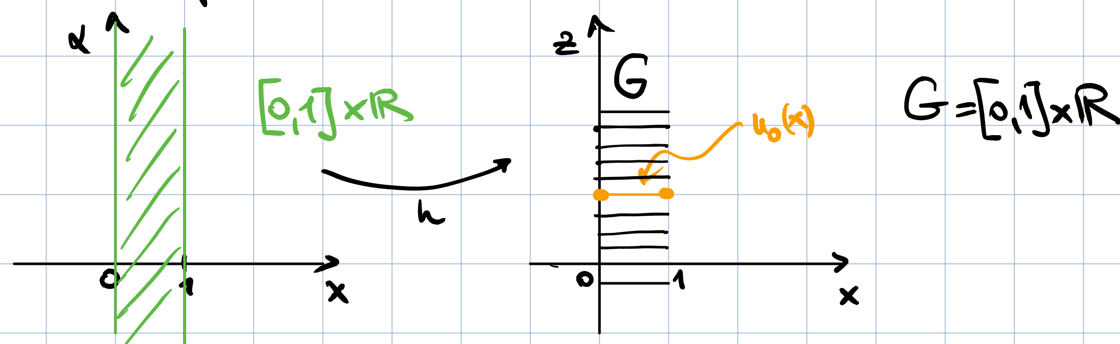


ii) Verifichiamo subito che $u_0\equiv 1$ soddisfa la cond. nec. di Weierstrass, ossia $\mathcal{E}(x,u_0(x),u_0'(x),\eta)\geq 0 \;\forall x\in[0,1]\;\forall \eta\in\mathbb{R}$.

$$\mathcal{E}(x,u,\xi,\eta)=f(u,\eta)-f(u,\xi)-f_\xi(u,\xi)(\eta-\xi)$$
$$=u\eta^2-u\xi^2-2u\xi(\eta-\xi)$$

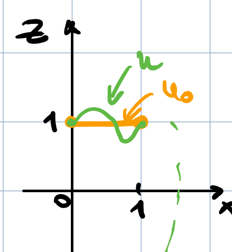
Quindi $\mathcal{E}(x,u,\xi,\eta) = u\eta^2 - u\xi^2 - 2u\xi\eta + 2u\xi^2$
$$= u\eta^2 - 2u\xi\eta + u\xi^2$$
$$= u(\eta-\xi)^2$$
$\Rightarrow \mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) = \mathcal{E}(x,1,0,\eta) = \eta^2 \geq 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$

Notiamo che $u_0 \equiv 1$ su $[0,1]$ può essere immerso in un campo di estremali:



basta considerare $u_\alpha(x) = 1+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in[0,1]$

quindi $u_0(x)\equiv 1$ immerso nel campo di estremali $h(x,\alpha) = (x, u_\alpha(x))$. La funzione pendenza è data banalm. da $P(x,z) = 0 \quad \forall (x,z) \in G$

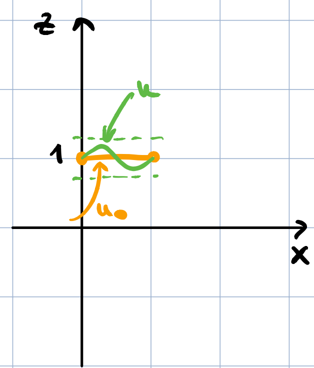


Oss. che
$$f_{\xi\xi}(x,u,\xi) = 2u$$
e quindi
$$f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) = 2u_0(x) = 2 > 0 \quad \forall x\in[0,1]$$
e quindi è soddisfatta la cond. di Legendre stretta.
Inoltre, $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall u \in X$ t.c. $\|u-u_0\|_{C^0} < \delta$ si ha $\forall \xi\in\mathbb{R}$, $f_{\xi\xi}(x,u(x),\xi) > 0$.

Dal Corollario 2, b) segue che $u_0 \equiv 1$ è un pt. di min. relativo forte (stretto) per F in X. Vale $F(u_0)=0$.

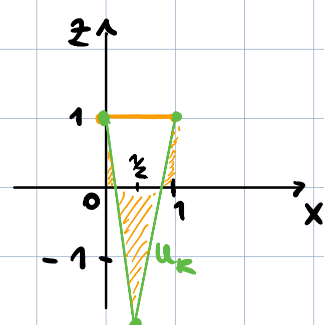
$\square$

iii)



$$F(u)=\int_0^1 u u'^2 dx$$

Se u è "vicino in norma C^0" a $u_0 \equiv 0$, dove $F(u_0)=0$, allora $F(u)>0$ essendo u positiva e $u'^2>0$ e quindi u_0 è pt. di minimo rel. forte per F in X. Se invece posso andare "lontano da u", anche nei valori negativi !!!!, allora u_0 non sarà più pt. di minimo!



Consid. $u_k(x)=k|x-\frac{1}{2}|-\frac{k}{2}+1$

$u_k(0)=u_k(1)=1$

$$u_k(x)=\begin{cases}-kx+1 & \text{se } x\in[0,\frac{1}{2}] \\ kx+1-k & \text{se } x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

$k>4$

Oss. $u_k \notin C^1$, ma basta "smussare" il pt. angoloso $(\frac{1}{2},u_k(\frac{1}{2}))$ e tutto si fa allo stesso modo. Abbiamo

$$F(u_k)=\int_0^{1/2}(-kx+1)k^2dx+\int_{1/2}^1(kx+1-k)k^2dx$$

$$= k^2\left[-\frac{k}{2}x^2+x\right]_0^{1/2} + k^2\left[k\frac{x^2}{2}+(1-k)x\right]_{1/2}^{1}$$

$$= k^2\left(1-\frac{k}{4}\right) < 0 \quad \text{per } k>4$$

Consid. la "regolarizz." di u_k, cioè $\tilde{u}_k \in C^1([0,1])$ con $\tilde{u}_k(0)=\tilde{u}_k(1)=1$ e $F(\tilde{u}_k)<0$ $\forall k>4$; in particolare $F(\tilde{u}_k) < F(u_0)$!!

Oss. che $\inf\limits_{u\in X} F(u) = \lim\limits_{k\to+\infty} F(\tilde{u}_k) = -\infty$. ∎

Es. 2 (già visto nella lez. 17, pag. 175)

Vogliamo studiare la natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^1 [u'^2 - u^2]\,dx$ su $X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0)=u(1)=0\}$

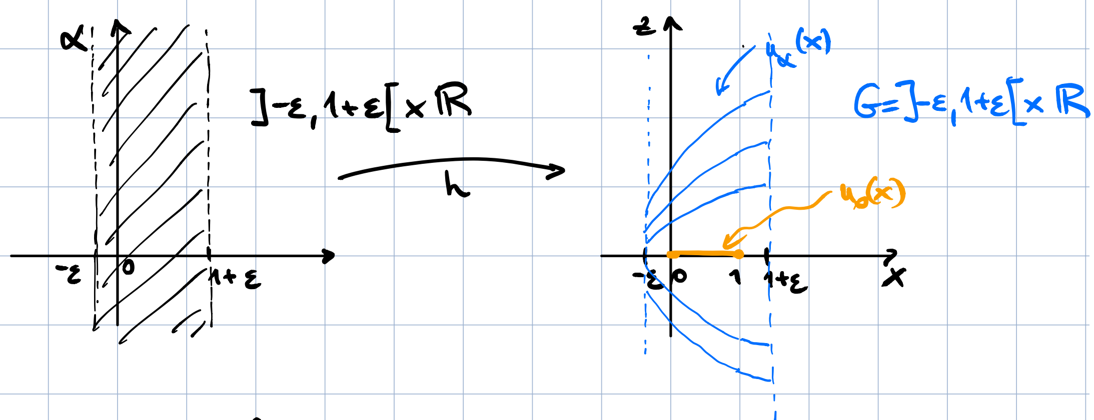
Sol. Abbiamo già visto che $u_0 \equiv 0$ soddisfa la cond. nec. di Weierstrass per minimizz. rel. forti.

Vogliamo capire se $u_0 \equiv 0$ è un pt. di min. rel. forte, usando la teoria dei campi.

Oss. $f(x,u,\xi) = \xi^2 - u^2 \Rightarrow$ l'eq. di (EE) è $u''+u=0$ su $[0,1]$ e $u_0 \equiv 0$ è l'unico estremale di F in X.

Oss. che tale estremale può essere immersa in una

famiglia di estremali $u_\alpha(x) = \alpha \sin(x + 2\varepsilon)$ $\varepsilon > 0$ fissato
su $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$



Analog. come fatto nella lez. prec. abbiamo $\forall (x,z) \in G$
la funz. pendenza $P(x,z) = \dfrac{z}{tg(x+2\varepsilon)}$.

Notiamo che $f_{\xi\xi}(x,z,\xi) = 2$ $\forall (x,z,\xi) \in [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
e $G =]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\times \mathbb{R}$.
Per l'oss. 3 possiamo concludere che $u_0 \equiv 0$
è un pt. di minimo assoluto (unico) per F in X. □

oss. Possiamo oss. che h è un campo di Weierstrass.
Infatti $f(x,u,\xi) = \xi^2 - u^2$

$$\mathcal{E}(x,z,\xi,\eta) = f(z,\eta) - f(z,\xi) - f_\xi(z,\xi)(\eta-\xi)$$
$$= \eta^2 - \cancel{z^2} - \xi^2 + \cancel{z^2} - 2\xi(\eta - \xi)$$
$$= (\eta-\xi)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(x,z,P(x,z),\eta) = (\eta - P(x,z))^2 \geq 0 \quad \forall (x,z) \in G$$
$$> 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R},\ \eta \neq P(x,z)$$

Otteniamo la stessa conclusione di sopra usando l'oss2.
■

Es. 3 Vogliamo studiare $\inf_{u\in X} F(u)$, dove

$$F(u)=\int_0^1 (u'^2-1)^2\,dx\,,\quad X=\{u\in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0)=0,\, u(1)=k\}.$$

Proviamo

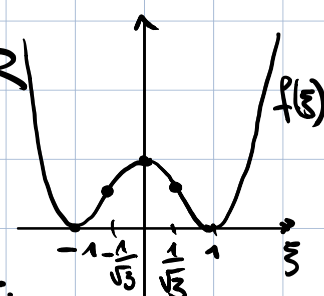
i) per $|k|\geq 1$, $u_0(x)=kx$ è un pt. di min. assoluto per F in X;

ii) per $|k|>1$, " è un pt. di minimo assoluto stretto per F in X;

iii) per $|k|<1$, $u_0(x)=kx$ non è un pt. di min. rel. forte per F in X;

iv) per $k=0$, $u_0(x)\equiv 0$ non è un pt. di min. rel. debole per F in X.

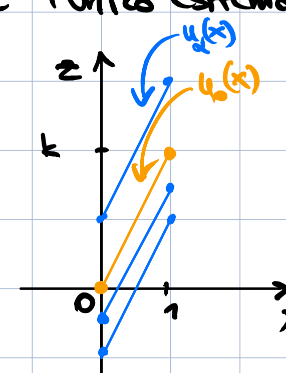
Svolg.: $f(x,u,\xi)=f(\xi)=(\xi^2-1)^2$ su $\mathbb{R}$



(EE) $\quad \dfrac{d}{dx}\left[f_\xi(u')\right]=0$, ossia

$f_\xi(u')=\text{cost.}$

Segue, come già visto, che $u_0(x)=kx$ è l'unico estremale per F in X.



L'estremale u_0 può essere immerso nel campo di estremali $h(x,\alpha)=(x,u_\alpha(x))$ con

$$u_\alpha(x)=kx+\alpha \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

e la funzione pendenza $P(x,z)=k\quad \forall (x,z)\in G=[0,1]\times\mathbb{R}$

Oss. $f_\xi(\xi) = 2(\xi^2-1)2\xi$

$f_{\xi\xi}(\xi) = 4(\xi^2-1) + 8\xi^2 = 12\xi^2 - 4$
$= 4(3\xi^2-1)$

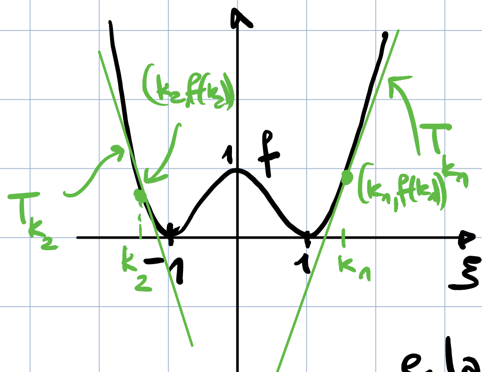
Proviamo che

$$\mathcal{E}(x,z,P(x,z),\eta) \geq 0 \quad \forall (x,z)\in G \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo

$$\mathcal{E}(x,z,k,\eta) = f(\eta) - f(k) - f_\xi(k)(\eta-k) = f(\eta) - T_k(\eta)$$

dove $T_k(\eta)$ è l'eq. della retta tg. al grafico di f nel pt $(k, f(k))$.



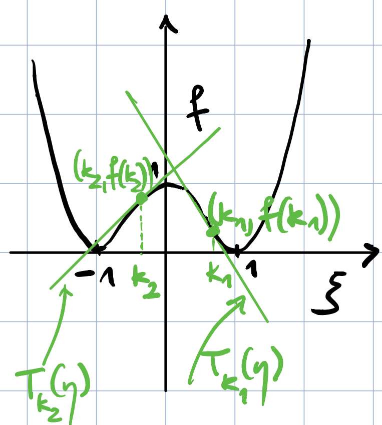
$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{R},\ |k| \geq 1$

$$\mathcal{E}(x,z,k,\eta) \geq 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

e la conclusione di i) segue dal Teor. 1 e OSS. 2. $\square$

ii) $\forall k \in \mathbb{R},\ |k|>1$, si ha $\mathcal{E}(x,z,\overset{k}{P(x,z)},\eta) > 0$ $\forall (x,z) \in G = [0,1]\times\mathbb{R}$ e $\forall \eta \neq P(x,z) = k$ (il campo di estremali è un campo di Weierstrass. Quindi dall'Oss. 2 segue la tesi. $\square$

iii) Oss. che $\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) = \mathcal{E}(x, kx, k, \eta)$
$= f(\eta) - T_k(\eta)$ dove $T_k(\eta)$ è l'eq. della retta tg al grafico di f nel pt. $(k, f(k))$. Dal grafico di f si vede subito che per $k \in \mathbb{R}$, $|k|<1$, si ha $\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) = f(\eta) - T_k(\eta) \not\geq 0$ $\forall \eta \in \mathbb{R}$, ossia non è soddisfatta la cond. nec. di Weierstrass.



□

iv) Da iii) si ha che $u_0 \equiv 0$ non è un pt. di minimo rel. forte, ma vediamo subito che non è nemmeno un pt. di minimo relativo debole. Basta osservare che $f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) = f_{\xi\xi}(0) = -4 < 0$ (in $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ la funz. lagrangiana è concava!!) e quindi $u_0 \equiv 0$ non soddisfa la cond. necessaria di Legendre! ■