1ª Lez. 17/02/20 Benvenuti !!

http://latemar.science.unitn.it/defranceschi (programma + bibliografia, diario, materiale didattico, modalità d'esame)

<u>Pbm. di minimo</u> : dato un insieme X, dato $f: X \to \mathbb{R}$, funzione

studiare il $\min\{f(x) : x \in X\}$ se esiste; altrim. $\inf\{f(x) : x \in X\} = \inf\limits_{x\in X} f(x)$. ∃ sempre

- con <u>minimo</u> si intende il minimo valore (estremo),
- i <u>pt. di minimo</u> (estremanti) sono tutti i pt. $x_0 \in X$:

$f(x_0)$ = minimo valore

$f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in X$.

(minimi assoluti)

<u>Pbm.</u> a) Determinare se il minimo esiste

b) se sì, trovare quanto vale e trovare i pt. di minimo.

metodo diretto

⇝ cond. nec. / suff. che devono soddisf. i pt. di min.

metodo indiretto (classico)

⇝ c) Se no, trovare $\inf\{f(x) : x \in X\}$ e capire

→ perché il minimo $\nexists$

→ come si raggiunge l'inf.

(Es. $f(x) = \arctg x$ su $\mathbb{R}$, $\inf\limits_{\mathbb{R}} f = -\frac{\pi}{2}$

$\nexists \min\limits_{\mathbb{R}} f$, nonostante f sia limit. inf.)

<u>in $\mathbb{R}$</u> <u>Metodo indiretto</u> : <u>Es.</u> $\min\{\underbrace{x^2+2x}_{f(x)} : x \in \overset{X}{\overset{\parallel}{\mathbb{R}}}\}$ $\in C^1, C^2 \dots$

$\rightsquigarrow f'(x) = 2x+2 \underset{\substack{f'(x)=0 \\ \text{(cond. nec.)}}}{\rightsquigarrow} x=-1$ (pt. critico) $\xrightarrow{\text{pt di min ?}}$ $\min = f(-1) = -1$

Devo provare che è effettiv. il minimo !!

"a mano" • <u>Dim. seria</u> : $x^2+2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$= -1 \iff x = -1.$
$(x+1=0)$

(in alternativa) • Avrei potuto oss. che $f(x) = x^2+2x$ convessa $(f''(x) = 2 > 0)$ (cond. suff.)
quindi un pt. critico, se esiste, è pt. di minimo. □

Metodo diretto: dim. direttamente l'esistenza del minimo mediante teoremi astratti (generalizz. teorema di Weierstraß)

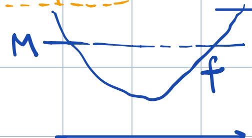
$f: X \to \mathbb{R}$, X compatto $\neq \emptyset \subset \mathbb{R}$, f continua (basta s.c.i.) $\Rightarrow \exists$ minimo di f su X.

chiuso e limitato

per es. **Teorema**: $f: \underset{= X}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ continua (basta s.c.i.)
$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$. Allora $\exists \min_X f$.

NOTA: una richiesta sull'andamento di f "sostituisce" compattezza di X.

NOTA: la $f(x) = x^2+2x$ soddisfa queste ipotesi!



Dim. Oss. che per M suff. grande

$$K_M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq M\} \neq \emptyset,$$

• chiuso (essendo f continua; basta s.c.i.)

• $K_M \subset B_{\delta_M}(0)$ per $\delta_M > 0$ opportuno; quindi K_M è limitato
(segue dall'ipotesi $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$)

$\Rightarrow K_M \neq \emptyset$, compatto. Applichiamo il teorema di Weierstraß ad f su K_M: $\exists x_0 \in K_M$ t.c.

(*) $$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in K_M.$$

Ovv. x_0 è un pt. di minimo su tutto $\mathbb{R}$, cioè

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Infatti • Se $x \in K_M$, allora vale (*)

• Se $x \notin K_M$, allora $f(x) > M \geq f(x_0)$.
$\uparrow x_0 \in K_M$ ■

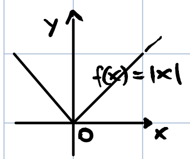
Oss. 1) Nell'esempio serve regolarità di $f(x)$

$f \in C^1 \rightsquigarrow f'(x_0) = 0$] cond. nec. affinché x_0 pt. di minim.

$f \in \mathcal{C}^2 \rightsquigarrow f''(x_0) \geq 0$

Oss. C'è un gap tra le cond. nec. e quella suff. $f(x)=x^4$, $x_0=0$ pt. di min; $f'(0)=0$, $f''(0)=0$

oss. cond. suff.: convessità, oppure $f''(x_0) > 0$.



2) Non serve tanta regolarità per avere un minimo: esistenza!

$f(x) = |x|$ $\quad x_0 = 0$ pt. di min.

I ns. pbm. di minimo saranno limitati ai FUNZIONALI INTEGRALI (integrali variazionali) del tipo

f trattato sopra

corrisponde a f(x) sopra

sopra variabile x.

$$\boxed{F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,dx \qquad F: X \to \mathbb{R}}$$

$f: [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua assegnata

funzione lagrangiana o semplic. lagrangiana

$$f(\underset{\in[a,b]}{x}, u, \underset{\in\mathbb{R}}{\xi})$$

$u: [a,b] \to \mathbb{R}$ incognita, $u \in X$

$X =$ spazio di funzioni ammissibili; per esempio:

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\} \subset V = \mathcal{C}^1([a,b])$$

α, β sono assegnati

$$\tilde{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha\}, \qquad \bar{\bar{X}} = V$$

$$\hat{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : \underbrace{\int_a^b u(x) = 1}_{\text{vincolo}}\}$$

Pbm. Discutere $\inf_{u \in X} F(u)$:
- $\exists$enza del minimo
- trovare pt. di minimo!

Funzionale è sinonimo di funzione e si usa tutte le volte che l'argomento è a sua volta una funzione!

Es. $F(u) = \int_0^1 (u'(x))^2 dx$ $\quad u \in X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta\}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ assegnati

$[a,b] = [0,1]$ $\quad f(x,u,\xi) = \xi^2$. ■

Perché studiare questi pbm. variazionali?

Molti pbm. dell' Analisi, Geom., Mat. applicata in Fisica, Economia. .... possono essere formulati come pbm. di minimo di funzionali integrali.

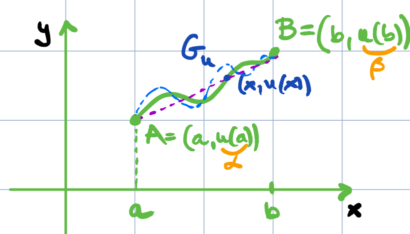
Es. 1 Curva di minima lunghezza (caso non-parametrico)

Es. 2 Brachistocróna (pbm. della più rapida discesa Johann Bernoulli 1697)

Es. 3 Superficie di rivoluzione (di rotazione) di area minima

Es. 4 Disug. isoperimetrica (pbm. di Didone).

Es. 1 (curva di minima lunghezza) (caso non-parametrico)



Pbm. congiungere A con B con una curva di classe $C^1([a,b])$ che minimizzi il funzionale lunghezza

$$L(u) = \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$$

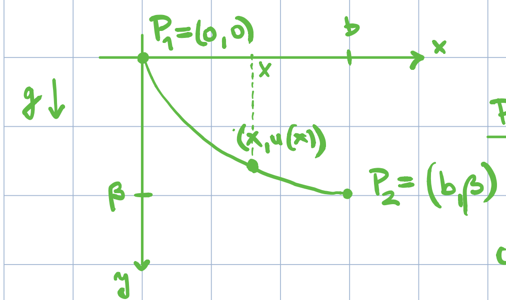
tra tutte le curve ammissibili, cioè trovare una soluzione per il pbm. di minimo

(P1) $$\inf\left\{ L(u) = \int_a^b \sqrt{1+u'(x)^2}\, dx : u \in X \right\}$$

$X = \{u \in C^1([a,b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}$ α, β assegnati

In questo caso $f(x,u,\xi) = f(\xi) = \sqrt{1+\xi^2}$. $\square$

Es.2 (Brachistócrona) (dal greco: "cronos" = tempo, "brachistos" = superlativo di "brachys" = breve)



P_1 a quota maggiore di P_2

Pbm. Dati i pt. P_1 e P_2 in un piano verticale determinare il cammino liscio che li congiunge lungo il quale un pt. materiale discende da P_1 a P_2 per effetto della sola gravità nel più breve tempo possibile.

Tale pbm. si risolve studiando

$$(P2) \qquad \inf\left\{ T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1+u'(x)^2}{u(x)}}\,dx \ : \ u \in X \right\}$$

$$X = \left\{ u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0)=0,\ u(b)=\beta,\ u(x)>0 \text{ su }]0,b] \right\}$$

insieme delle funz. ammissibili $\qquad\qquad \uparrow$ assegnato.

In questo caso $f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = \sqrt{\frac{1+\xi^2}{u}}$ $\square$

il fattore $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ influisce solo sul valore del minimo, ma non sull'esistenza! Possiamo inglobarlo nell'espressione della f, ma anche no!

La soluzione si rivelerà essere una cicloide.