20 Lez. 27/04 (registrato 27/04)

Ⓐ Metodi indiretti del CdV (approccio fino ad ora visto)

$$\inf_{u\in X} \int_a^b f(x,u,u')dx$$ ~ primi 200 anni del CdV

⇝ Newton, Bernoulli (1690), Weierstrass... Legendre...

i) Cond. nec. che un pt. di minimo deve soddisf. $\delta F(u,v)=0$... Eq. [EE]] richiesta C^1 C^2

Se siamo soluz. del [EE] (estremali) sono minimi?

ii) Cond. suff. per pt. di min.
- convessità (min. assoluti)
- teoria di Jacobi dei pt. coniugati (min. rel. deb.)
- teoria dei campi di Weierstrass (min. rel. forti)

→ Discussione senza chiedersi se il minimo esiste!!

→ Pbm..!! La riduzione del pbm. di minimo ad un pbm. di eq. diff. non sempre costituisce un metodo efficace !! princip. perchè nel CdV il concetto di soluzione NON È LOCALE!, ma si ricerca una soluzione soddisf., per es., certi condizioni al contorno!

⇝ Risolv. l'eq. diff. riesco solo in casi semplici!
Come si estende questo approccio nel caso di funzionali integrali pluridim.? $\int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))dx$??
(EE) diventa un'eq. a derivate parziali!!

→ OSS. Fino ad ora abb. solo usato tecniche del calcolo infinitesimale/integrale e pochi risultati di Analisi Funzionale e della teoria della misura di Lebesgue. Non abbiamo usato il lemma fond. del CdV e il lemma di Du Bois-Reymond nella forma più generale per funz. L^1_{loc}! ma solo per funz. continue!

(B) Metodi diretti del CdV ($\rightsquigarrow$ 1900)

affronta il pbm. di $\exists$enza del minimo direttamente

(non ci si pone il pbm. di trovare un event. pt. minimo esplicit., cioè in carne e ossa; ma trovare delle cond. suff. che garantiscano la sua esistenza!)

senza l'uso dell'eq. di Eulero-Lagrange

$\rightsquigarrow$ Riemann, Gauss, Dirichlet, Arzelà, Hilbert, Tonelli (1920)

Per studiare in modo completo il pbm. del minimo per funzionali integrali in generale, si dovevano prima mettere in luce due fatti fondamentali:

i) semicontinuità "al posto della continuità"

ii) compattezza dei sottolivelli (coercitività)

} per F

$\Longrightarrow$ $\exists$enza di un pt. di minimo per F.

idea del teorema di Weierstrass a funzionali in dim ∞.

è fondamentale riconoscere la necessità di un adeguato quadro funzionale in cui studiare il pbm. di minimo per F (non solo C^1_{tratti}, $\mathcal{C}^1$, ...!!) e dim. per questi spazi risultati di compattezza analoghi a quelli di Ascoli-Arzelà.

OSS. i) e ii) – l'appliz. dell'idea di Weierstrass per l'esistenza di pt. di minimo! a funzionali in dim ∞ NON è però così immediata: la ragione sta nel fatto che queste due proprietà sono in un certo senso antagoniste:

- <u>per avere la s.c.i. (seq.) di F</u> conviene dotare lo spazio delle funz. X di una topologia relativ. forte: meno succ. convergenti ci sono, più è facile che funz. F sia convergente.
- <u>per la compattezza (seq.)</u> è invece meglio la situaz. opposta: più la converg. è debole, più facile che si abbiano succ. convergenti.

Risultati: [Tonelli] introduce la semicontinuità inferiore
teoremi di esistenza per $F(u) = \int_a^b f(x, u, u')\,dx$

<u>1 dim:</u> per $AC([a,b])$ funz. assolut. continue
in $BV([a,b])$ funz. a variaz. limitata.

<u>più dim.:</u> per stud. opp. $F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\,dx$
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow$ introduz. degli spazi di Sobolev (1938), Morrey (1940).

$\rightsquigarrow$ esistenza di pt. di minimo in spazi di Sobolev $\rightsquigarrow$ si apre il pbm. della regolarità ?!

(un pbm. simile che abbiamo visto:
$u \in C^1$ estrem. $\rightsquigarrow$ se $f \in C^2$, $f_{qq} > 0$
$\rightsquigarrow u \in C^2$) $\square$

Teorema (di Weierstrass): $f: K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

i) f continua (basta s.c.i. (seq.):
$\forall x_n \in K,\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_0) \le \liminf_{n\to+\infty} f(x_n)$)

ii) K compatto $\neq \emptyset$ (per succ.: da ogni succ. $(x_n) \subset K$ si può estrarre una sottosucc. $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ t.c. $x_{n_k} \to x_\infty \in K$.)

Allora f ammette minimo in K.

si ripete la stessa dim. !!

NOTA: questo teorema vale più in generale se $K \subset X$ insieme, X dotato di una convergenza per cui i) f è continua (basta s.c.i.) ii) $K \neq \emptyset$ compatto } rispetto a questa noz. di converg.

Dim. Sia $I = \inf_{x\in K} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Consid. $(y_n)_n$ succ. in $\mathbb{R}$ t.c. $y_n \downarrow I$
(se $I = -\infty$, basta prendere $y_n = -n$
se $I \in \mathbb{R}$, " $y_n = I + \frac{1}{n}$)

Abbiamo quindi
$$I < y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
Per def. di I (più grande minorante dell'insieme $\{f(x) : x \in K\}$ risulta che y_n non è un minorante dell'insieme immagine di f; quindi $\exists x_n \in K$ t.c.
$$f(x_n) < y_n$$

Inoltre $\quad \underset{\text{inf!}}{I} < f(x_n) < y_n$

$\Rightarrow \quad I = \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$

$\exists$enza della succ. min. $(x_n)_n$ ridotta

succ. minimizzante

Per ipotesi ii), la succ. $(x_n)_n$ ammette una sottosucc. $(x_{n_k})_k$ e $x_0 \in K$ t.c. $x_{n_k} \xrightarrow{k} x_0$.

Quindi

$$I \underset{\text{def. di inf}}{\leq} f(x_0) \underset{\text{f continua}}{=} \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = I$$

(basta s.c.i. $f(x_0) \leq \liminf_k f(x_{n_k})$)

visto che il limite di $f(x_n)$ $\exists$, tutte le succ. sottosucc. hanno limite ed è lo stesso!

$\Rightarrow \quad I = f(x_0) \in \mathbb{R}$, ed è il minimo richiesto e x_0 pt. di minimo. ∎

dim. è la medesima!

I^a VARIANTE DEL TEOREMA DI WEIERSTRASS

Vedi Nota

$\mathbb{R}^n$ può essere sostituito da un ins. X qualsiasi per cui si ha una noz. di conv.

Teorema: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c.

i) f continua (basta f s.c.i. (seq.))

ii) $\exists$ un sottolivello compatto, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq M\} = \{f \leq M\} \neq \emptyset \text{ è compatto (seq.!)}$$

Allora $\exists \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Dim. Poniamo $X_M = \{f \leq M\}$. Su X_M applico teor. di Weierstrass e ott. che $\exists x_0 \in X_M$ t.c.

(*) $$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X_M.$$

Vediamo che x_0 è un pt. di minimo in generale, cioè

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- Se $x \in X_M$, allora la diseg. è in (*)
- Se $x \notin X_M$, allora

$$f(x_0) \underset{x_0 \in X_M}{\leq} M < f(x) \quad \text{per def. } x \notin X_M.$$

$$\Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \qquad \blacksquare$$

II° VARIANTE DEL TEOREMA DI WEIERSTRASS

(già visto su $\mathbb{R}$ nella lez. 1)

Teorema: Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

i) f continua (basta s.c.i. (seq))

ii) $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Allora f ammette minimo.

Dim. Poniamo $M \doteq f(\bar{x}) + 1$ con $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ qualsiasi.

Consideriamo $X_M = \{f \leq M\}$.

Allora a) $X_M \neq \emptyset$ $\quad (\bar{x} \in X_M)$

b) X_M è chiuso $\quad (X_M = f^{-1}(]-\infty, M])$ è chiuso, poiché f è continua.

Nota: se f è s.c.i. (seq.), ancora X_M è chiuso!

c) X_M è limitato (grazie a ii):

$$\forall \tilde{M} > 0 \; \exists \tilde{N} > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n, (\|x\| > \tilde{N} \Rightarrow f(x) > \tilde{M})$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, (f(x) \leq \tilde{M} \Rightarrow \|x\| \leq \tilde{N})$$

allora consid. $\tilde{M} = M$ abbiamo che $\exists \tilde{N} > 0$:
$\forall x \in \mathbb{R}^n \ (f(x) \leq M \Rightarrow \|x\| \leq \tilde{N})$
$\Rightarrow X_M \subset B(0, \tilde{N})$.

b) + c) (in $\mathbb{R}^n$!!) garantisco X_M è compatto e quindi verifica ii) del teorema precedente!
$\Rightarrow f$ ammette minimo in $\mathbb{R}^n$, cioè $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. ∎

. ——— . ——— . ——— .

Semicontinuità + compattezza (coercitività) = metodo diretto (di Tonelli $\Rightarrow$ Esistenza del minimo!)

X spazio topologico (basta X insieme con una nozione di convergenza seq.)

Def. Sia $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Diremo che f è s.c.i. (seq.) (semicontinua inferiorm.) in x_0 se
$$f(x_0) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n),$$
per ogni succ. $(x_n)_n \subset X$ converg. a x_0 in X.
Diremo che f è s.c.i. (seq.) in X se f è s.c.i. (seq.) in ogni pt. di X.

• $K \subset X$ è (seq.) chiuso in X se $x \in K$ per ogni succ. $(x_n)_n \subset K$ convergente a x in X.

• $A \subset X$ è (seq.) aperto in X se $\forall x \in A$, per ogni succ. (x_n), $x_n \to x$ in X, $\exists k \in \mathbb{N}$: $x_k \in A$ $\forall h \geq k$.

Proposizione: Sia $f: X \to \mathbb{R}$, X come sopra. Le proprietà seg. sono equiv:

i) f è (seq.) s.c.i. in X;

ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, l'insieme $\{x \in X : f(x) > t\} = f^{-1}(]t, +\infty[)$ è (seq.) aperto in X;

iii) $\forall t \in \mathbb{R}$, l'insieme $\{x \in X : f(x) \leq t\} = f^{-1}(]-\infty, t])$ è (seq.) chiuso in X.

Dim. i) $\Leftrightarrow$ iii) vedi fondo lez. (pag. 217)

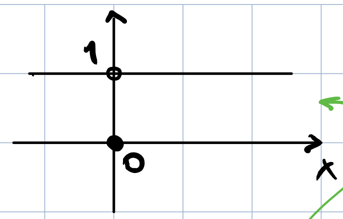
Def. Sia $f: X \to \mathbb{R}$. f si dice (seq.) coercitiva in X se la chiusura (seq.) degli insiemi dei sotto-livelli di f, cioè di $\{f \leq t\}$, è seq. compatta $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\hookrightarrow \overline{\{f \leq t\}}^{seq}$.

vedi fondo lez. (pag. 217)

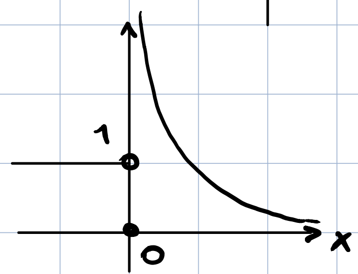
Oss. 1 Se $f \geq g$, $g: X \to \mathbb{R}$, e g è coercitiva (seq.) in X, allora anche f lo è.

Es. in $\mathbb{R}$:

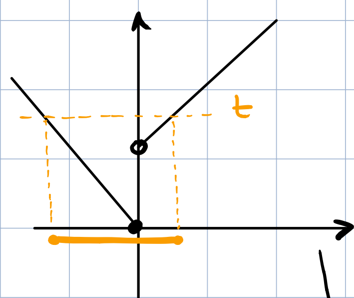


$\dfrac{f \text{ è s.c.i. (seq.) in}}{x_0 = 0}$

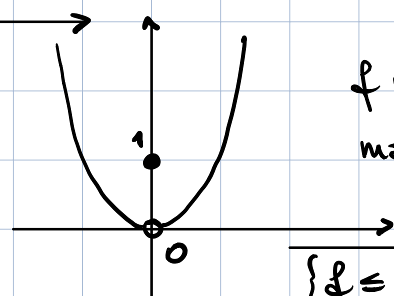
e continua in tutti gli altri pt.



nessuna delle due è (seq.) coerciva !



s.c.i. in $\mathbb{R}$ e coerciva

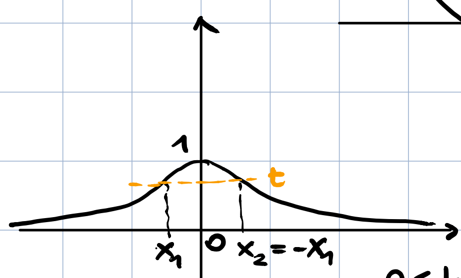


f non è s.c.i. (seq.) in 0

ma è coerciva in $\mathbb{R}$

$0 < t < 1$

$\{f \leq t\} = [-\sqrt{t}, \sqrt{t}]$



f è continua, ma non coerciva!

$0 < t < 1 \qquad \{f \leq t\} =]-\infty, x_1] \cup [-x_1, +\infty[$

non è compatto ! $\square$

Teorema (Tonelli – Weierstrass generalizzato)

Sia X spazio topologico. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ tale

i) f è (seq.) s.c.i in X

ii) f è (seq.) coerciva in X .

Allora $\exists$ un pt. di minimo di f in X, i.e. $\exists x_0 \in X$:
$$f(x_0) = \inf_X f$$

OSS. a) Noi cerchiamo di applicare questo teorema dove f sarà il ns. funzionale F !!
b) basta che su X sia definita una converg. seq. (non nec. derivante da una topologia) rispetto alla quale f è (seq.) s.c.i e (seq.) coerciva in X.
c) Prop. i) e ii) sono proprietà antagoniste!
Se ci sono poche succ. convergenti (topologia forte) è più facile avere la s.c.i. di f, ma è più difficile avere garantito la (seq.) compattezza cioè ii)

OSS. Palla chiusa in uno spazio normato (seq.) compatta per la top. debole ma non per la topologia forte! $\square$

Dim. Poniamo $I = \inf_X f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Allora $\exists$ una succ. minimizzante, cioè $(x_n) \subset X$ tale che
$$I = \lim_{n \to +\infty} f(x_n). \qquad < +\infty$$
In particolare,
$$(f(x_n))_n$$
è limitata superiorm., cioè $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.
$$f(x_n) \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
(compattezza (seq.) di $\{f \leq \lambda\}$)

Poiché f è (seq.) coercitiva, la succ. (x_n) ammette una sottosucc. $(x_{n_k})_k$ convergente ad un elemento $x_0 \in X$ con

$$x_0 \in \overline{\{f \leq \lambda\}}^{seq} = \{f \leq \lambda\} \quad \text{essendo } f \text{ s.c.i.(seq) in } X$$

si ha

$$f(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{s.c.i.}}}{\leq} \liminf_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = I$$

$\Rightarrow$ x_0 è un pt. di minimo per f in X. ■

TENTATIVI DI APPLICAZIONE

Vogliamo applicare il teorema di Tonelli e la sua dim. per ottenere teoremi di esistenza del minimo per funzionali del tipo

$$F(u) = \int_a^b f(u)\,dx \qquad u : [a,b] \to \mathbb{R}$$

e

$$F(u) = \int_a^b f(u')\,dx \qquad \text{"}$$

e anche $\int_a^b f(u, u')\,dx$

Es. 1

$$F(u) = \int_0^1 \left[u^2 - 2gu\right] dx \qquad g \in L^2(0,1)$$

$$X = L^2(0,1) = \left\{ u : [0,1] \to \mathbb{R}, \text{ misurabili } \int_0^1 u^2 dx < +\infty \right\}$$

$\rightsquigarrow \inf_{u \in X} F(u) < +\infty$

OSS 1: richiesta di dati al bordo non è sensata! $u \in L^2(0,1)$ def. q.o.

OSS. 2:

$$F(u) = \int_0^1 \left[u^2 - 2gu\right] dx = \underbrace{\int_0^1 (u-g)^2 dx}_{\geq 0} - \int_0^1 g^2 dx$$

$$\geq -\int_0^1 g^2 dx = F(g)$$

$\Rightarrow F(u) \geq F(g) \quad \forall u \in X$, e $= \Leftrightarrow u = g$ q.o.

Esiste una soluzione del pbm. $\inf_{u \in X} F(u)$

cioè $u(x) = g(x)$ q.o. su $]0,1[$. $\square$

pt. di min. unico perché strett. convesso. la lagrangiana =

Vorremmo applicare il quadro astratto per dim. l'esistenza del minimo!

<u>1° tentativo</u>: $X = L^2(0,1)$ dotato della topologia forte (convergenza forte); prov. che F è continua (non

solo s.c.i.), ma non seq. coercitiva !!

<u>2° tentativo</u>: $X = L^2(0,1)$ dotato con la topologia debole (convergenza debole); prov. che F è solo (seq) s.c.i. rispetto la top. deb., ma anche (seq.) coercitiva ! $\square$

. ——— . ——— . ——— .

pag. 212

i) $\Rightarrow$ iii): Sia $t \in \mathbb{R}$ fissato; sia $x_n \in \{f \leq t\}$ e $x_n \to x$ in X.

Poiché f s.c.i. si ha $f(x) \leq \liminf\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \leq t$. Quindi $x \in \{f \leq t\}$.

Quindi $\{f \leq t\}$ è (seq.) chiuso in X. $\square$

iii) $\Rightarrow$ i): Sia $x \in X$, sia $x_n \to x$ in X. Sia $t > \liminf\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$

Allora $t > \sup\limits_{k} \inf\limits_{h \geq k} f(x_n) \geq \inf\limits_{h \geq k} f(x_h)$ $\forall k$. Per def. di inf, $\exists h_k$ t.c. $t \geq f(x_{h_k}) > \inf\limits_{h \geq k} f(x_h)$.

Segue $x_{h_k} \in \{f \leq t\}$. Essendo l'insieme (seq.) chiuso e $x_{h_k} \xrightarrow{k} x$ (poiché tutta la succ. converge) $\Rightarrow x \in \{f \leq t\}$, cioè $f(x) \leq t$. Facendo tendere t a $\liminf\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$ si ha $f(x) \leq \liminf\limits_{h \to +\infty} f(x_h)$. $\blacksquare$

pag. 212.

Sia $x_n \in \overline{\{f \leq t\}}^{seq} \overset{g \leq f}{\Rightarrow} x_n \in \overline{\{g \leq t\}}^{seq}$. Poiché g (seq.) coercitiva in X $\exists x_{n_k} \to x_0$. Poiché $\overline{\{f \leq t\}}^{seq} \Rightarrow x_0 \in \overline{\{f \leq t\}}^{seq}$. Si ha che $\overline{\{f \leq t\}}^{seq.}$ è (seq.) compatto . $\blacksquare$